Cálculo en Varias Variables

Apunte del curso
(grupos MA2001-01 y MA2001-08)

Aris Daniilidis
Departamento de Ingeniería Matemática

Equipo docente otoño 2021:

Aris Daniilidis (cátedra)
Sebastián Bustos Atalah (auxiliar)
Felipe Hernández Castro (auxiliar)

(Parte I) Espacios normados, topología, continuidad

En esta primera parte de este curso introducimos dos nociones básicas en un espacio vectorial: la noción del producto escalar y la noción de la norma. Basados en esta última, definiremos la distancia entre dos elementos del espacio, luego la noción de bola y finalmente la topología del espacio vectorial.

La topología nos permitirá demarcar la noción de proximidad, luego definir y estudiar la convergencia de sucesiones y la continuidad de funciones entre espacios normados. También estudiaremos nociones topológicas como conjuntos abiertos, cerrados y compactos en relación con la clase de las funciones continuas.

La compacidad es una noción topológica de suma importante: en esta parte nos servirá para reforzar la continuidad en continuidad uniforme, luego para enunciar y demostrar el teorema de Weierstrass, relativo a las funciones continuas con valores reales.

Mediante la noción de sucesión de Cauchy, definiremos los espacios métricos completos, y en particular los espacios de Banach y de Hilbert. La noción de completitud nos llevará al primer teorema fundamental de este curso, el teorema del punto fijo para contracciones (teorema del punto fijo de Banach). Una aplicación importante de dicho teorema es el renombrado teorema de Picard-Lindelöf sobre la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Índice de contenidos

1. Espacios con producto escalar y espacios normados

En esta parte, empezaremos con un recordatorio sobre nociones básicas en la teoría de espacios vectoriales, incluyendo ejemplos en dimensión infinita. Luego procederemos en considerar dichos espacios con una estructura adicional a su estructura algebraica, introducida por un producto escalar o directamente por una norma.

1.1. Espacios vectoriales, dimensión, ejemplos

Consideramos el espacio Euclideano $\mathbb{R}^d$, cuyos elementos (vectores) $x \in \mathbb{R}^d$ están representados mediante sus coordenadas como sigue:

$$x = (x_1, \ldots, x_d)\,.$$

Es fácil ver que los números reales $\{x_1, \ldots, x_d\}$ son las coordenadas de la representación del vector x en la base canonica

$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \qquad i \in \{1, \ldots, d\},$$

en el sentido que

$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i \qquad \text{(combinación linear única del vector } x \text{ en la base } \{e_i\}_i)$$

El siguiente resultado muestra que en dimensión finita, desde el punto de vista del álgebra lineal, no hay diferencia entre los espacios de la misma dimensión.

Teorema 1.1 (Isomorfía algebraica entre espacios de la misma dimensión)**.** *Cada espacio vectorial* $\mathbb{E}$ *(sobre el cuerpo de los reales* $\mathbb{R}$*) de dimensión* d *es (isomorfo a)* $\mathbb{R}^d$*.*

Demostración. Basta fijar una base $\mathcal{B} = \{f_1, \ldots, f_d\}$ del espacio $\mathbb{E}$, luego observar que cada elemento (vector) $X \in \mathbb{E}$ se escribe de forma única como $X = \sum_{i=1}^{d} x_i f_i$, y por lo tanto está identificado por sus coordenadas $(x_1, \ldots, x_d)$ en esta base. Se puede entonces definir una biyección $i : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}^d$, con $i(X) = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ para todo $X \in \mathbb{E}$. □

Observación 1.2. Notemos que la identificación del espacio $\mathbb{E}$ con $\mathbb{R}^d$ aunque natural, no es canónica ya que depende de la elección de base en $\mathbb{E}$. En principio, en un espacio vectorial arbitrario, no hay manera canónica de elegir una base.

Ejemplo 1.3 (espacios de dimensión finita)**.** Veamos a continuación unos ejemplos de espacios vectoriales de dimensión finita que tienen estructura conocida, y por lo tanto, base canónica.

(i). $\mathbb{E} = \mathbb{R}_n[X]$ (polinómios de una variable y grado menor o igual a n)

Los elementos (vectores) de este espacio son funciones polinomiales. Anotamos por $p(x)$ un tal elemento arbitrario. Entonces, se tiene que

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n\, x^n, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

El polinomio se representa de forma natural mediante sus coeficientes $(a_0, \ldots, a_{n+1})$, lo cual induce un isomorphismo canónico entre $\mathbb{R}_n[X]$ y $\mathbb{R}^{n+1}$. La base canónica

$$\mathcal{B}_n = \{e_0, \ldots, e_n\} \tag{2}$$

del espacio $\mathbb{R}_n[X]$ está formada por los polinomios

$$e_0(x) = 1 \text{ (función constante)}, \quad e_1(x) = x \text{ (función identidad)}, \quad \ldots \quad , e_n(x) = x^n.$$

Observamos que los coeficientes $(a_0, \ldots, a_{n+1})$ del polinomio $p(x)$ dado por (1) son sus coordenadas en la base $\mathcal{B}$.

(ii) $\mathbb{E} = \mathcal{M}_{m\times n}$ (matrices $m \times n$)

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & & \ldots \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & \ldots & & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Entonces las entradas $\{a_{ij} : 1 \leq i \leq m \ ; \ 1 \leq j \leq n\}$ de la matriz A son sus coordenadas (cuando A se ve como elemento del espacio vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}$) en la base canonica

$$\mathcal{E} = \{E_{11}, \ldots, E_{mn}\},$$

donde E_{ij} representa la matriz cuyas entradas son todas iguales a cero, salvo la entrada de la i-fila y j-columna que es igual a 1. Este espacio tiene dimensión $m \cdot n$ y es isomorfo con $\mathbb{R}^{nm}$.

Antes de continuar, recordamos la siguiente definición.

Definición 1.4 (independencia lineal de conjuntos infinitos)**.** Sea $\mathbb{E}$ un espacio vectorial. Un conjunto $B \subset \mathbb{E}$ (potencialmente infinito) de se dice linealmente independiente, si cada subconjunto finito $\{\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_\ell\}$ de B es linealmente independiente, eso es: dado $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\ell} \subset \mathbb{R}$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \mathbf{b}_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\ell = 0.$$

Ejemplo 1.5 (espacios de dimensión infinita)**.** Veamos ahora unos ejemplos naturales de espacios de dimensión infinita.

(iii) $\mathbb{E} = \mathbb{R}[X]$ (polinómios de una variable y cualquier grado)

Los elementos de este espacio son polinomios $p(x)$ de forma (1) donde $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario. Observamos que el conjunto (infinito, numerable)

$$\mathcal{B} = \{e_0, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots\}, \tag{3}$$

donde $e_m(x) = x^m$ (monomio de orden m) es linealmente independiente. En efecto, cada subconjunto finito de $\mathcal{B}$ también es subconjunto de $\mathcal{B}_n$ dado por (2) para n suficientemente grande y por lo tanto linealmente independiente, ya que $\mathcal{B}_n$ era base para el espacio $\mathbb{R}_n[X]$. Además, cada polinomio tiene única escritura en la base (3). Efectivamente:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n\, x^n = a_0\, e_0(x) + a_1 e_1(x) + \ldots + a_n\, e_n(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

por lo que deducimos que:

$$p = a_0\, e_0 + \ldots + a_n\, e_n,$$

es decir, p se escribe como combinación lineal (finita) de elementos de la base $\mathcal{B}$.

(iv) $\mathbb{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ (espacio de sucesiones)

Solimos representar cada elemento $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por sus imagenes como función $x(n) \equiv x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Anotamos con e^m la sucesión

$$e^m(n) = \delta_n^m = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n \\ 0, & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

y observamos que el conjunto (infinito, numerable)

$$\mathcal{D} = \{e^1, \ldots, e^m, e^{m+1}, \ldots\}$$

es linealmente independiente en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, pero no es una base en dicho espacio, ya que la sucesión $x(n) = 1$, para todo $n \geq 1$ no se puede obtener como combinación lineal finita de elementos de $\mathcal{D}$.

(v) $\mathbb{E} = c_0(\mathbb{N}) := \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0\}$ (sucesiones convergentes a cero)

Observamos que $\mathcal{D} \subset c_0(\mathbb{N}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Igual que en el ejemplo anterior, el conjunto $\mathcal{D}$ es linealmente independiente, pero no genera el espacio $c_0(\mathbb{N})$, sino el espacio $c_{00}(\mathbb{N})$ de las sucesiones eventualmente nulas (eso es, $x_n = 0$ para todo n grande).

Ejercicio 1.6. (i) Mostrar que el espacio $c_{00}(\mathbb{N})$ de las sucesiones eventualmente nulas es isomorfo al espacio $\mathbb{R}[X]$ de los polinomios.

(ii) Mostrar que los espacios vectoriales de los ejemplos (vi)–(v) anteriores no pueden tener una base numerable.

Observación 1.7 (Base algebraica vs Axioma de elección)**.** La demostración de la existencia de una base algebraica (también conocida como base de Hamel) en un espacio vectorial de dimensión infinita requiere del uso del llamado lema de Zorn[1]. En particular, la existencia de una base en caso general no se puede obtener de forma constructible.

1.2. El espacio Euclidiano $\mathbb{R}^d$

En continuación, consideramos el espacio Euclideano $\mathbb{R}^d$. Dados dos vectores $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, se define el producto escalar (canónico):

$$\langle x, y \rangle = y^T \cdot x = \sum_{i=1}^{d} x_i \, y_i \tag{4}$$

Antes de continuar, observamos que

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \text{(simetría)} \qquad \text{y} \qquad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \text{(con igualdad si y sólo si } x = 0\text{)}.$$

También observamos que para todo $y \in \mathbb{R}^d$, la aplicación

$$x \mapsto \langle x, y \rangle \qquad \text{es lineal,}$$

es decir, para todo $x, z \in \mathbb{R}^d$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\langle \lambda x + \mu z, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle z, y \rangle.$$

Dada la propiedad de simetría (mencionada antes), se deduce que para todo $x \in \mathbb{R}^d$, la aplication $y \mapsto \langle x, y \rangle$ también es una aplicación lineal.

El producto escalar sirve para definir la noción de *ortogonalidad*: Definimos dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^d$ como ortogonales (anotando $x \perp y$) si $\langle x, y \rangle = 0$.

Ejercicio 1.8 (orthogonalidad)**.** (i) Mostrar que $x = (x_1, \ldots x_d) \in \mathbb{R}^d$ es ortogonal a cualquier otro vector del espacio, entonces $x = 0$.

(ii) Encontrar todos los vectores $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ que son orthogonales al vector $(1, 1)$.

[1]El lema de Zorn es una forma equivalente del *Axioma de Elección* que conjuntamente con los axiomas de Zermelo-Fraenkel de la teoría de conjuntos constituyen la base axiomática de la matemática moderna.

Otra utilidad del producto escalar (4) es que emana al concepto de *longitud* (*norma*). En efecto, a partir del producto escalar, podemos definir la llamada norma Euclidiana (también conocida como norma-2) de un vector $x \in \mathbb{R}^d$ como sigue:

$$||x||_2 = \langle x, x \rangle = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \right)^{1/2} \tag{5}$$

Es inmediato ver que la función "norma Euclidiana" $x \mapsto ||x||_2$ satisface las siguientes propiedades:

– Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}^d$, se tiene que $||\lambda x||_2 = |\lambda| \cdot ||x||_2$ (homogenidad) y

– Para todo $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene $||x||_2 \geq 0$, y $||x||_2 = 0$ si y sólo si $x = 0$.

A continuación veremos que dicha función también satisface la siguiente propiedad, conocida como *desigualdad triangular*:

$$\text{Para todo } x, y \in \mathbb{R}^d : \qquad ||x + y||_2 \leq ||x||_2 + ||y||_2. \tag{6}$$

Para establecer lo anterior, necesitamos previamente mostrar un resultado fundamental que relaciona el producto escalar con la norma Euclidiana.

Proposición 1.9 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^d$)**.** Para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$ se tiene:

$$|\langle x, y \rangle| \;\leq\; ||x||_2 \cdot ||y||_2. \tag{7}$$

Además, (7) se tiene con igualdad si y sólo si los vectores x, y son co-lineales.

Demostración. Sea $t \in \mathbb{R}$ arbitrario. Consideramos el vector $x + ty \in \mathbb{R}^d$ y observamos que:

$$\langle x + ty, x + ty \rangle = (||x + ty||_2)^2 \geq 0.$$

Utilizando la bi-linearidad (es decir, la linearidad con respecto a la primera y con respecto la segunda variable) del producto escalar, así como la simetría, deducimos:

$$\langle x + ty, x + ty \rangle = \ldots = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle\, t \;+\; t^2 \,\langle y, y \rangle \geq 0.$$

Evocando (5) obtenemos el binomio:

$$(||y||_2)^2 \; t^2 \;+\; 2\langle x, y \rangle\, t \;+\; (||x||_2)^2 \;\geq\; 0, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

La condición de positividad impide la existencia de dos raíces distinctas y es equivalente a la no positividad del discriminante del binomio:

$$\Delta = (2\langle x, y \rangle)^2 - 4\,(||y||_2)^2\,(||x||_2)^2 \leq 0,$$

lo que finalmente es equivalente a la ecuación (7).

Observamos por último que tener igualdad en (7) equivale a $\Delta = 0$, es decir, la existencia de una raíz doble $t_* \in \mathbb{R}$ en la ecuación (8), lo cual significa que $||x + t_* y|| = 0$, o sea $x = -t_* y$. $\square$

Mostramos ahora la desigualdad triangular (6) utilizando (5) y (7). Para eso, sean $x, y \in \mathbb{R}^d$. Entonces

$$\begin{aligned}(||x+y||_2)^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = (||x||_2)^2 + 2\langle x, y\rangle + (||y||_2)^2 \\ &\le (||x||_2)^2 + 2\,||x||_2\,||y||_2 + (||y||_2)^2 = (||x||_2 + ||y||_2)^2\end{aligned}$$

de lo que se deduce (6).

Mencionamos por último que a partir del producto escalar, podemos definir el *ángulo* ϕ que forman dos vectores x, y diferentes del cero:

$$\phi = \arccos\left(\frac{\langle x, y\rangle}{||x||_2 \cdot ||y||_2}\right).$$

Observamos que la Proposición 1.9 garantiza que la cuantidad en parenthesis toma valores entre -1 y 1. Se decude que $\phi \in \{0, \pi\}$ si y sólo si los vectores x, y son co-lineales.

1.3. Definición abstracta de producto escalar y de norma

Los resultados obtenidos en la sección anterior no son especificos del espacio Euclidiano $\mathbb{R}^d$ y se pueden reproducir en situaciones más generales. En esta sección veremos definimos de forma axiomática las nociones del producto escalar y de norma y veremos que la Proposición 1.9 sigue siendo cierta en este marco más abstracto.

A lo largo de esta sección anotamos por $\mathbb{E}$ un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales, sin imponer ninguna restricción sobre su dimensión o la naturaleza de sus elementos, y procedemos a definir la noción (abstracta) de un producto escalar.

Definición 1.10 (producto escalar)**.** Una función

$$b : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$$

se dice producto escalar sobre el espacio vectorial $\mathbb{E}$ si cumple las siguientes tres propiedades:

(b1) (b es simetrica) $\quad b(x, y) = b(y, x)$, para todo $x, y \in \mathbb{E}$;

(b2) (b es bi-lineal) las aplicaciones $x \mapsto b(x, y)$ & $y \mapsto b(x, y)$ son lineales;

(b3) (b es definida positiva) $b(x, x) \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{E}$ & $b(x, x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

A continuación, definimos la noción (abstracta) de una norma.

Definición 1.11 (norma)**.** Una función

$$N : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$$

se dice norma sobre el espacio vectorial $\mathbb{E}$ si cumple las siguientes tres propiedades:

(N1) (homogenidad) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{E}$;

(N2) (desigualdad triangular) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{E}$;

(N3) (definida positiva) $N(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{E}$ & $N(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Es importante destacar que a partir de ahora, el término "norma" hará referencia a cualquier función $N(x)$ (que también se suele anotar $||x||$) que cumple las propiedades (N1)–(N3), y que en el mismo espacio $\mathbb{E}$ podemos definir distintas normas. Fijando una norma $\|\cdot\|$, el par $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$ se llama espacio normado.

La siguiente proposición muestra que a partir de un producto escalar b podemos definir una norma N asociada a este producto, de forma analoga que se hizo en la Subsección 1.2.

Proposición 1.12 (norma definida por un producto escalar)**.** Sea $b : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ un producto escalar en $\mathbb{E}$. Entonces la función

$$N(x) = \sqrt{b(x,x)} \tag{9}$$

es una norma en $\mathbb{E}$ y para todo $x, y \in \mathbb{E}$ se cumple:

$$|b(x,y)| \leq N(x) \cdot N(y) \qquad \text{(desigualdad Cauchy-Schwarz – versión abstracta)} \tag{10}$$

Además, la ecuación (10) se cumple con igualdad si y sólo si x, y son linealmente dependientes.

Demostración. La demostración sigue los mismos pasos que la de la Proposición 1.9. Fijamos $x, y \in \mathbb{E}$ y $t \in \mathbb{R}$. A partir de (9) obtenemos

$$b(x+ty, x+ty) = N(x+y)^2 \geq 0,$$

luego evocando las propiedades (b1)–(b2) de la Definición 1.10 , deducimos:

$$b(x+ty, x+ty) = \ldots = b(x,x) + 2b(x,y)\,t \;+\; t^2\, b(y,y) \geq 0.$$

Evocando nuevamente (9) obtenemos el binomio:

$$N(y)^2\, t^2 \;+\; 2\langle x, y\rangle\, t \;+\; N(x)^2 \;\geq\; 0, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

lo que equivale a la condición de no positividad del discriminante:

$$\Delta = 4b(x,y)^2 - 4N(x)^2 N(y)^2 \leq 0.$$

De lo anterior se obtiene (10), así como la caracterización de la dependencia lineal entre x e y.
El hecho que la función $x \mapsto N(x) = \sqrt{b(x,x)}$ satisface las propiedades (N1) y (N3) de la Definición 1.11 es inmediato, mientras que la propiedad (N2) es consecuencia de la desigualdad Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} N(x+y)^2 = b(x+y,x+y) = b(x,x) + 2b(x,y) + b(y,y) &\le N(x)^2 + 2N(x)N(y) + N(y)^2 \\ &= (N(x)+N(y))^2. \end{aligned}$$

La demostración es completa. □

Ejemplo 1.13 (espacios normados típicos.)**.** **(i)**. La norma Euclidiana $\|\cdot\|_2$ definida por (5) es una norma en el espacio $\mathbb{R}^d$ (en el sentido de la Definición 1.11). Dejamos como ejercicio al lector verificar que las siguientes functiones:

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \text{ (norma-1)} \quad \& \quad ||x||_\infty = \text{máx } \{|x_1|, \ldots, |x_d|\} \text{ (norma-infinito)}$$

también son normas[2] en $\mathbb{R}^d$.

(ii). Sea $c_{00}(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n\ge1} :\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ x_n = 0, \forall n \ge n_0\}$ el espacio vectorial de las sucesiones eventualmente nulas (véase 1.5 (v)). Entonces las funciones

$$||x||_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \quad \text{(norma-1)} \qquad \& \qquad ||x||_\infty = \text{máx}\, \{|x_n| :\ n \ge 1\} \quad \text{(norma-infinito)}$$

están bien definidas[3] y son normas en $c_{00}(\mathbb{N})$. Invitamos al lector de comprobar que las funciones $x \mapsto ||x||_1$ y $x \mapsto ||x||_\infty$, $x = (x_n)_n \in c_{00}(\mathbb{N})$ satisfacen las propiedades (N1)–(N3).

(iii). La función $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $b(a,b) = ab$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ es un producto escalar en $\mathbb{R}$. La norma correspondiente a este producto escalar es el valor absoluto: $|a| = \sqrt{a^2}$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

(iv). La functión $b : c_{00}(\mathbb{N}) \times c_{00}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $b(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_n y_n$ define[3] un producto escalar en el espacio de sucesiones eventualmente nulas. La norma asociada a este producto escalar es:

$$||x||_2 = \sqrt{b(x,x)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{(norma-2)}$$

[2]Los espacios $(\mathbb{R}^d,\ ||\cdot||_1)$, $(\mathbb{R}^d,\ \|\cdot\|_2)$ y $(\mathbb{R}^d,\ \|\cdot\|_\infty)$ son distintos como espacios normados.
[3]Es importante recordar que sólo finitos términos de la sucesión $(x_n)_{n\ge1}$ pueden ser diferentes de cero.

Ejercicio 1.14 (espacio de funciones continuas)**.** Denotamos por $\mathcal{C}([0,1])$ el espacio vectorial de functiones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Para cada $f \in \mathcal{C}([0,1])$ definimos:

$$||f||_1 := \int_0^1 |f(t)|dt \ ; \qquad ||f||_2 := \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \qquad \& \qquad ||f||_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

(i). Mostrar que las functiones $f \mapsto ||f||_1$, $f \mapsto ||f||_2$ y $f \mapsto ||f||_\infty$ son normas en $\mathcal{C}([0,1])$ (se llamarán, norma-1, norma-2 y norma-infinito, respectivamente).

(ii). Mostrar que la norma-2 proviene del producto escalar

$$b(f,g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt, \qquad \text{para cada } f,g \in \mathcal{C}([0,1]).$$

Terminamos esta subsección observando que de forma analoga al espacio Euclidiano $\mathbb{R}^d$, en cualquier espacio vectorial $\mathbb{E}$ que posee un producto escalar $b : \mathbb{E}\times\mathbb{E} \to \mathbb{R}$ podemos hablar de ortogonalidad (definiendo $x \perp y$ si y sólo si $b(x,y) = 0$) así como del ángulo entre dos elementos de $\mathbb{E}$ diferentes de cero.

2. Topología de un espacio normado

En esta sección veremos como a partir de una norma podemos definir una estructura topológica en el espacio, y dar sentido, entre otras cosas, a la convergencia de sucesiones. También veremos que normas distintas definen en principio diferentes topologías, salvo en dimensión finita, donde la estructura topológica no depende de la norma elegida.

2.1. Bolas, conjuntos abiertos y cerrados

Sea $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Para cada $x \in \mathbb{E}$ y $\delta > 0$ definimos la bola abierta (respectivamente, la bola cerrada) con centro $x \in \mathbb{E}$ y radio $\delta > 0$ mediante la formula

$$B(x,\delta) := \{z \in \mathbb{E} : \ ||z-x|| < \delta\} \quad (\text{respectivamente, } \ \bar{B}(x,\delta) := \{z \in \mathbb{E} : \ ||z-x|| \leq \delta\}\,).$$

Ejercicio 2.1 (bolas en $\mathbb{R}$)**.** Considerando $\mathbb{R}$ como espacio normado (con norma el valor absoluto), mostrar que las bolas abiertas (respectivamente cerradas) coinciden con los intervalos abiertos acotados (respectivamente, cerrados acotados).

Ejercicio 2.2 (convexidad de la bola)**.** Utilizando la desigualdad triangular (propiedad (N2) de la norma) mostrar que la bola abierta $B(x,\delta)$ (luego respectivamente, la bola cerrada $\bar{B}(x,\delta)$) es un conjunto *convexo*, es decir, contiene los segmentos definidos por sus elementos. En otras palabras, para todo $y,z \in B(x,\delta)$ se tiene que

$$[y,z] := \{ty + (1-t)z : t \in [0,1]\} \subset B(x,\delta).$$

Notación: Si A, B son dos subconjuntos de un espacio vectorial $\mathbb{E}$ y $t \in \mathbb{R}$ denotaremos:

$$A + B = \{a + b : \ a \in A, b \in B\} \qquad \text{y} \qquad tA = \{ta : \ a \in A\}.$$

En el caso que A es un singleton $\{a\}$, escribiremos $a + B$ en lugar de $\{a\} + B$.

La siguiente proposición dice que a partir de la bola unitaria (abierta o cerrada) centrada en el origen, podemos generar todas las bolas del espacio mediante traslados y homotecías.

Proposición 2.3 (determinación por la bola unitaria)**.** Sea $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$ un espacio normado, $x \in \mathbb{E}$ y $\delta > 0$. Entonces:

$$B(x, \delta) = x + \delta B(0, 1) \qquad \text{y} \qquad \bar{B}(x, \delta) = x + \delta \bar{B}(0, 1).$$

Demostración. Mostramos el resultado para las bolas abiertas. Observamos que:

$$B(x, \delta) = \{z \in \mathbb{E} : \ ||z - x|| < \delta\} = \{x + u : \ ||u|| < \delta\} = x + \{u : \ ||\delta^{-1}u|| < 1\}.$$

Poniendo $v := \delta^{-1}u \iff u = \delta v$ deducimos de lo anterior que

$$B(x, \delta) = x + \{\delta v : \ ||v|| < 1\} = x + \delta B(0, 1).$$

El resultado para las bolas cerradas se demuestra de forma analoga. $\square$

Definición 2.4 (topología de un espacio normado)**.** Sea $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$ un espacio normado. Un conjunto $\mathcal{U} \subset \mathbb{E}$ se dice *abierto*, si

$$\text{para cada } x \in \mathcal{U} \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } B(x, \delta) \subset \mathcal{U}. \tag{11}$$

La familia de los abiertos se dice *topología* del espacio normado $\mathbb{E}$ y se denota por $\mathcal{T}$.

Observamos que el conjunto vacío $\emptyset$ cumple trivialmente la definición anterior, por lo tanto es un conjunto abierto. Lo mismo ocurre con todo el espacio $\mathbb{E}$. La siguiente proposición nos dice que todas las bolas abiertas son conjuntos abiertos y nos da propiedades caracteristicas de estos últimos.

Proposición 2.5 (propiedades de conjuntos abiertos)**.** Sea $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$ un espacio normado.
(i). Las bolas abiertas son conjuntos abiertos.
(ii). Unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierto.
(iii). Intersección finita de conjuntos abiertos es abierto.

Demostración. (i). Sea $\bar{x} \in \mathbb{E}$, $\delta > 0$ y $\mathcal{U} := B(\bar{x}, \delta)$. Mostramos que $\mathcal{U}$ cumple la definición (11). Para eso, tomamos un elemento arbitrario $x \in \mathcal{U}$, es decir, $||x - \bar{x}|| < \delta$. Ponemos $r := \delta - ||x - \bar{x}|| > 0$ y mostramos que $B(x, r) \subset \mathcal{U}$ (véase Figura 1). En efecto,

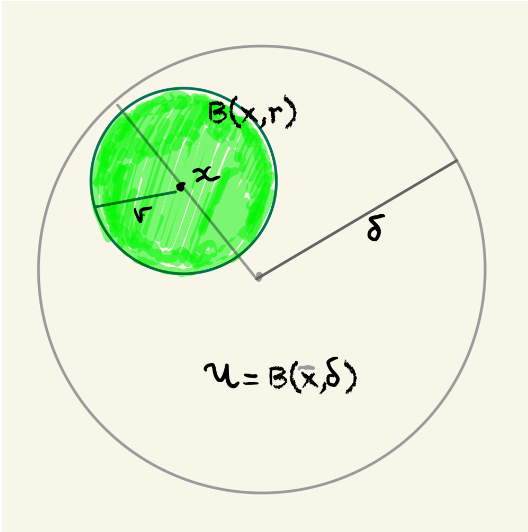

Figura 1: La bola abierta es un conjunto abierto.

sea $y \in B(x,r)$, es decir, $||y-x|| < r$. Entonces por la desigualdad triangular (N2) de la definición de la norma se deduce:

$$||y-\bar{x}|| = ||\,(y-x)+(x-\bar{x})\,|| \leq ||y-x|| + ||x-\bar{x}|| < r + ||x-\bar{x}|| = \delta,$$

es decir, $y \in B(\bar{x},\delta) = \mathcal{U}$.

(ii). Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ una familia de abiertos en $\mathbb{E}$ (de cualquier cardinalidad). Sea $\mathcal{U} = \cup_{i\in I}\mathcal{U}_i$ y sea $x \in \mathcal{U}$. Entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in \mathcal{U}_{i_0}$. Siendo $\mathcal{U}_{i_0}$ abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset \mathcal{U}_{i_0} \subset \mathcal{U}$. Lo anterior significa que el conjunto $\mathcal{U}$ cumple la propiedad (11), es decir, es abierto.

(iii). Sea $\{\mathcal{V}_1,\ldots,\mathcal{V}_k\}$ una familia finita de abiertos en $\mathbb{E}$ y $\mathcal{V} = \bigcap_{i=1}^{k}\mathcal{V}_i$. Sea $x \in \mathcal{V}$. Entonces para cada $i \in \{1,\ldots,k\}$, existe $\delta_i > 0$ tal que $B(x,\delta_i) \subset \mathcal{V}_i$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1,\ldots,\delta_k\} > 0$ deducimos que $B(x,\delta) \subset B(x,\delta_i) \subset \mathcal{V}_i$ para todo $i \in \{1,\ldots,k\}$, y por lo tanto $B(x,\delta) \subset \bigcap_{i=1}^{k}\mathcal{V}_i = \mathcal{V}$, es decir, $\mathcal{V}$ es abierto. $\square$

Ejercicio 2.6 (caracterización de los conjuntos abiertos). **(i).** Mostrar que en un espacio normado $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$, un conjunto es abierto, si y sólo si es unión de bolas abiertas.

(ii). **(★)** En el espacio normado $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ mostrar que $G \subset \mathbb{R}$ es abierto, si y sólo si G se escribe como unión disjunta númerable de intervalos abiertos.
(*Indicación:* Definir en G la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \text{el intervalo definido por } x \text{ e } y \text{ está contenido en } G$$

luego mostrar que las clases de equivalencia de la relación anterior son intervalos abiertos.)

Procedemos ahora a definir el *interior* de un conjunto $A \subset \mathbb{E}$ arbitrario como sigue:

$$\mathrm{int}\,(A) := \bigcup \{\mathcal{U} \in \mathcal{T} : \ \mathcal{U} \subset A\}\,.$$

Es inmediato por la Proposición 2.5 (ii) que el interior de cualquier conjunto es un conjunto abierto y $\mathrm{int}\,(A) \subset A$. Además A es abierto si y sólo si $A = \mathrm{int}\,(A)$.

Procedemos ahora a definir los conjuntos cerrados, que es la noción dual de los conjuntos abiertos.

Definición 2.7 (conjuntos cerrados – definición topológica)**.** Sea $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$ un espacio normado. Un conjunto $F \subset \mathbb{E}$ se dice *cerrado*, si su complemento $\mathcal{U} = \mathbb{E} \setminus F$ es abierto.

La siguiente proposición es análoga de la Proposición 2.5 y nos proporciona de un mecanismo para obtener conjuntos cerrados.

Proposición 2.8 (propiedades de conjuntos cerrados)**.** Sea $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$ un espacio normado.
(i). Las bolas cerradas son conjuntos cerrados.
(ii). Unión finita de cerrados es cerrado.
(iii). Intersección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado.

Demostración. Mostraremos solo la parte **(i)** y dejamos como ejercicio las dos últimas afirmaciones. Sea $\bar{x} \in \mathbb{E}$ y $\delta > 0$ y ponemos $\mathcal{U} = \mathbb{E} \setminus \bar{B}(\bar{x}, \delta)$. Basta mostrar que $\mathcal{U}$ es abierto. Sea $x \in \mathcal{U}$ (arbitrario), es decir, $||x - \bar{x}|| > \delta$. Ponemos $r := ||x - \bar{x}|| - \delta > 0$ y mostramos que $B(x, r) \subset \mathcal{U}$. En efecto, sea $y \in B(x, r)$, es decir, $||y - x|| = ||x - y|| < r$. Por la desigualdad triangular (N2) de la definición de la norma se deduce:

$$||y - \bar{x}|| \geq ||x - \bar{x}|| - ||x - y|| > ||x - \bar{x}|| - r = \delta,$$

es decir, $y \notin \bar{B}(\bar{x}, \delta)$ o de forma equivalente $y \in \mathcal{U}$. $\square$

Definimos ahora la *clausura* de un conjunto $A \subset \mathbb{E}$ (que anotamos por $\mathrm{cl}\,(A)$ o por $\bar{A}$) como sigue:

$$\bar{A} = \mathrm{cl}\,(A) := \bigcap \{F \text{ cerrado} : \ A \subset F\}\,.$$

Es inmediato por la Proposición 2.8 (iii) que la clausura de cualquier conjunto es un conjunto cerrado y $A \subset \mathrm{cl}\,(A)$. Además A es cerrado si y sólo si $A = \mathrm{cl}\,(A)$. Por último, definimos la *frontera* ∂A de un conjunto A como la diferencia entre su clausura y su interior, es decir:

$$\partial A = \mathrm{cl}\,(A) \setminus \mathrm{int}\,(A).$$

Observar que la frontera de un conjunto es siempre un conjunto cerrado, como intersección de los cerrados $\mathrm{cl}\,(A)$ y $\mathbb{E} \setminus \mathrm{int}\,(A)$.

Observación 2.9. **(i).** Existen muchos conjuntos que no son ni abiertos, ni cerrados, como por ejemplo el intervalo $A = [0, 1)$ en $\mathbb{R}$. En este caso $\mathrm{cl}\,(A) = [0, 1]$, $\mathrm{int}\,(A) = (0, 1)$ y $\partial A = \{0, 1\}$. Otro ejemplo interesante es el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. En este ejemplo tenemos $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathrm{int}\,(\mathbb{Q}) = \emptyset$ y por lo tanto $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R} \supsetneq \mathbb{Q}$.

(ii). En un espacio vectorial $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$, los conjuntos $\emptyset$ (vacío) y $\mathbb{E}$ (todo el espacio) son a la vez abiertos y cerrados (observanse que cada uno es el complemento del otro).

2.2. Conjuntos acotados, convergencia de sucesiones.

La presencia de una norma en un espacio vectorial permite definir los conjuntos acotados, así como la convergencia de las sucesiones. A continuación, fijamos un espacio normado $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$ y denotamos por $\mathcal{T}$ su topología (cf. Definición 2.4). Dado un elemento $\bar{x} \in \mathbb{E}$, introducimos la siguiente notación:

$$\mathcal{T}_{\bar{x}} := \{\mathcal{U} \in \mathcal{T} : \ \bar{x} \in \mathcal{U}\} \quad \text{(familia de los abiertos que contienen el elemento } \bar{x}\text{)}$$

Cada elemento de $\mathcal{T}_{\bar{x}}$ se dice *vecindad* (abierta) de $\bar{x}$.

Definición 2.10 (convergencia de sucesión)**.** Una sucesión $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{E}$ se dice convergente en $\mathbb{E}$ con límite $\bar{x} \in \mathbb{E}$ (se denota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ o $(x_n) \to \bar{x}$) si para cada vecindad $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_{\bar{x}}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \mathcal{U}$ para todo $n \geq n_0$.

Proposición 2.11 (caracterización de la convergencia)**.** Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{E}$. Los siguientes son equivalentes:

(i). $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$;

(ii). $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0 : ||x_n - \bar{x}|| < \varepsilon$.

Demostración. Monstramos primero **(i)** $\Rightarrow$**(ii).**
Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por la Proposición 2.5(i) la bola abierta $B(\bar{x}, \varepsilon)$ es un conjunto abierto (que contiene $\bar{x}$), por lo tanto $\mathcal{U} := B(\bar{x}, \varepsilon) \in \mathcal{T}_{\bar{x}}$. Por la Definición 2.10, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, se tiene que $x_n \in B(\bar{x}, \varepsilon)$, lo que equivale a $||x_n - \bar{x}|| < \varepsilon$.

Monstramos ahora **(ii)**$\Rightarrow$**(i).** Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_{\bar{x}}$. Entonces $\mathcal{U}$ es abierto y $\bar{x} \in \mathcal{U}$. Evocando (11) deducimos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$. Por la hipotesis **(ii)** existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $||x_n - \bar{x}|| < \varepsilon$, o de forma equivalente $x_n \in B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$. $\square$

Ejercicio 2.12 (unicidad del límite)**.** Mostrar que en un espacio normado, el límite de una sucesión convergente es único.
(*Indicación:* Sean $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{E}$ límites de una sucesión $(x_n)_n \subset \mathbb{E}$. Si $\bar{x} \neq \bar{y}$ entonces poner $\delta = ||\bar{x} - \bar{y}||/2$ y aplicar (ii) de la Proposición 2.11.)

Ejemplo 2.13 (convergencia en $\mathbb{R}$)**.** Sea $\{t_n\}_n \subset \mathbb{R}$ una sucesión de reales que converge a $t_* \in \mathbb{R}$. Considerando $\mathbb{R}$ como espacio normado con su valor absoluto, observamos que (ii) equivale a lo siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : \quad t_* - \varepsilon < t_n < t_* + \varepsilon.$$

La Proposición 2.11 relaciona la convergencia de una sucesión (que involucra solo los conjuntos abiertos) con la propiedad (ii) que involucra directamente la norma. Observamos que en el caso que el espacio normado es $\mathbb{R}$ con el valor absoluto, esta última propiedad corresponde a la definición de convergencia de una sucesión de números reales que se suele dar en cursos del primer año. También observamos que (ii) se puede interpretar de la siguiente manera:

La sucesión (de vectores) $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{E}$ converge al vector $x \in \mathbb{E}$

$$\Updownarrow$$

la sucesión (de reales) $\{||x_n - x||\}_{n\geq 1}$ converge a $0 \in \mathbb{R}$.

Definición 2.14 (conjuntos acotados)**.** En un espacio normado $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$ un conjunto $A \subset \mathbb{E}$ se dice *acotado*, si existe $M > 0$ tal que $||x|| \leq M$ para todo $x \in A$.

En otras palabras, un conjunto es acotado, si se puede incluir en una bola de radio $M > 0$ (tan grande como sea necesario), es decir, $A \subset \bar{B}(0, M)$. Resulta obvio que cada conjunto finito, así como todas las bolas (abiertas o cerradas) del espacio son conjuntos acotados, mientras que el espacio $\mathbb{E}$ (o cualquier subespacio no trivial) no lo es. Otros ejemplos de conjuntos acotados se proporcionan mediante la siguiente proposición.

Proposición 2.15. En un espacio normado cada sucesión convergente es acotada.

Demostración. Sea $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{E}$ una sucesión convergente y sea $\bar{x} \in \mathbb{E}$ su límite. Entonces tomando $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene $||x_n - \bar{x}|| < 1$. Sea $M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, |\bar{x}| + 1\}$. Se deduce que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ejercicio 2.16. En un espacio normado dar un ejemplo de una sucesión no acotada, luego un ejemplo de una sucesión acotada pero no convergente.

Terminamos esta sección con el siguiente resultado que proporciona una definición alternativa de los conjuntos cerrados de un espacio normado mediante la convergencia de sucesiones. El resultado dice que un conjunto es cerrado si contiene los límites de sus sucesiones convergentes.

Proposición 2.17 (caracterización de cerrados mediante sucesiones)**.** Sea $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$ un espacio normado y $F \subset \mathbb{E}$. Los siguientes son equivalentes:

(i). El conjunto F es cerrado.

(ii). Para cada sucesión convergente $(x_n)_{n\geq 1}$ de F se debe tener que $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x} \in F$.

Demostración. (i)⇒(ii). Sea $(x_n)_{n\geq 1} \subset F$ una sucesión convergente y sea $\bar{x} \in \mathbb{E}$ su límite. Supongamos, por contradicción que $\bar{x} \notin F$, es decir, $\bar{x} \in \mathcal{U} := \mathbb{E} \setminus F$. Observamos que $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_{\bar{x}}$ por lo tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in \mathcal{U}$ para todo $n \geq n_0$ (cf. Definición 2.10). Eso significa que existen (infinitos) términos de la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ que no están en F, lo que contradice la hipotesis.

(ii)⇒(i). Supongamos que F no es cerrado, es decir, su complemento $\mathcal{U} := \mathbb{E} \setminus F$ no es abierto. Entonces existe $\bar{x} \in \mathcal{U}$ que no cumple (11). Utilizamos esta negación para construir una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en F que converge a $\bar{x}$. En efecto, para todo $n \geq 1$ y $\delta_n = 1/n$ la negación de (11) afirma que existe al menos un elemento $x_n \in B(x, \delta_n) \setminus \mathcal{U}$.

En otras palabras, se define una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en F (que es el complemento de $\mathcal{U}$) que cumple $||x_n - \bar{x}|| < \delta_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$. Se deduce que $(x_n)_{n\geq 1} \subset F$ es convergente con límite $\bar{x} \in \mathcal{U} = \mathbb{E} \setminus F$, lo que contradice la hipotesis. $\square$

Definición 2.18 (puntos de acumulación y puntos aislados)**.** Sea A un subconjunto de un espacio normado $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$ y $\bar{x} \in \mathbb{E}$. Decimos que:

(i). $\bar{x}$ es un punto de acumulación de A si

$$\forall \delta > 0 : \quad [B(\bar{x}, \delta) \cap A] \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset,$$

es decir, si cada bola centrara en $\bar{x}$ contiene puntos de $A \setminus \{\bar{x}\}$.

(ii). $\bar{x}$ es un punto aislado de A si $\bar{x} \in A$ y $\bar{x}$ no es un punto de acumulación de A.

El conjunto de los puntos de acumulación de un conjunto A se llama *adherencia* o *conjunto derivado* de A y se anota por $\mathrm{Adh}(A)$ o respectivamente por A'.

Ejercicio 2.19. Sea $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$ un espacio normado y $A \subset \mathbb{E}$. Mostrar que

(i). $\bar{x} \in \mathrm{Adh}(A)$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $A \setminus \{\bar{x}\}$, con $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

(ii). $\bar{x} \in \mathrm{cl}(A)$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en A, con $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

(iii). La clausura de A es la unión de los sus puntos de acumulación con sus puntos aislados:

$$\mathrm{cl}(A) = \mathrm{Adh}(A) \cup [A \setminus \mathrm{Adh}(A)]$$

Ejercicio 2.20 (convexidad de un espacio normado)**.** Mostrar que en un espacio normado $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$ los únicos conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados son el conjunto vacío $\emptyset$ y todo el espacio $\mathbb{E}$.

2.3. Equivalencia de normas

En la Subsección 2.1 hemos definido la topología de un espacio normado $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$ mediante sus bolas. Mientras que dos normas que definen las mismas bolas son iguales (véase Ejercicio 2.27 al final de la sección), no ocurre lo mismo con la topología, en el sentido que distintas normas en $\mathbb{E}$ podrían dar lugar a la misma topología. Cuando eso ocurre, decimos que las normas son equivalentes. A continuación, si N_1, N_2 son dos normas en $\mathbb{E}$ anotaremos por

$$B_i(x, \delta) := \{z \in \mathbb{E} : N_i(z - x) < \delta\}$$

la bola abierta con centro x y radio $\delta > 0$ definida por la norma N_i y por $\mathcal{T}_i$ la topología correspondiente (cf. Definición 2.4), donde $i \in \{1, 2\}$.

Definición 2.21 (equivalencia de normas)**.** Sean N_1, N_2 dos normas en el espacio vectorial $\mathbb{E}$. Decimos que las normas N_1 y N_2 son equivalentes (anotando $N_1 \sim N_2$) si definen las mismas topologías, es decir, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Es inmediato de la Definición 2.10 que dos normas equivalentes tienen las mismas sucesiones convergentes. Luego presentaremos un criterio simple para determinar si dos normas son equivalentes. Empezamos con el siguiente resultado.

Proposición 2.22 (comparación de topologías)**.** Sean N_1, N_2 dos normas en el espacio vectorial $\mathbb{E}$. Los siguientes son equivalentes:

(i). Existe $k > 0$ tal que $N_1(x) \leq k\, N_2(x)$, para todo $x \in \mathbb{E}$.

(ii). Existe $k > 0$ tal que $B_2(0, k^{-1}) \subset B_1(0, 1)$.

(iii). $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

Demostración. **(i)⇒(ii).** Sea $x \in B_2(0, k^{-1})$, es decir, $N_2(x) < k^{-1}$. Se deduce que $N_1(x) \leq k\, N_2(x) < 1$, es decir, $x \in B_1(0, 1)$.

(ii)⇒(iii). Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_1$ (abierto con la norma N_1) y $x \in \mathcal{U}$. Entonces (Definición 2.4) existe $\delta > 0$ tal que $B_1(x, \delta) \subset \mathcal{U}$. Se deduce de la Proposition 2.3 que $B_2(x, \delta/k) \subset B_1(x, \delta) \subset \mathcal{U}$ y por lo tanto $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_2$.

(iii)⇒(ii). Por la Proposición 2.5(i), $B_1(0, 1) \in \mathcal{T}_1$ y por hipotesis, $B_1(0, 1) \in \mathcal{T}_2$. Aplicando (11) para $x = 0$ se obtiene $\delta > 0$ tal que $B_2(0, \delta) \subset B_1(0, 1)$, lo que muestra el resultado para $k = \delta^{-1}$.

(ii)⇒(i). Esta implicación es la única que no es directa y necesita un poco más de trabajo. Por hipotesis, existe $k > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{E}$ se tiene:

$$kN_2(x) < 1 \implies N_1(x) < 1.$$

Supongamos, por contradicción, que (i) no se cumple, es decir, existe al menos un elemento $\bar{x} \in \mathbb{E}$ tal que $N_1(\bar{x}) > k\, N_2(\bar{x})$. Observamos que $\bar{x} \neq 0$ (sino tendríamos $N_1(\bar{x}) = N_2(\bar{x}) = 0$) y definimos:

$$y_n := k^{-1} \delta_n \frac{\bar{x}}{N_2(\bar{x})} \qquad \text{donde } \delta_n = 1 - \frac{1}{n}.$$

Dado que $\delta_n < 1$, por la propiedad (N1) de la Definición 1.11 se tiene que $kN_2(y_n) < 1$ y por lo tanto $N_1(y_n) < 1$. Volviendo a evocar la propiedad (N1) se deduce que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$N_1(y_n) = \left(\frac{k^{-1}\delta_n}{N_2(\bar{x})} \right) N_1(\bar{x}) < 1 \implies \delta_n N_1(\bar{x}) < kN_2(\bar{x}).$$

Tomando el límite $\delta_n \nearrow 1$ se obtiene $N_1(\bar{x}) \leq kN_2(\bar{x})$ lo que contradice lo supuesto. □

Como consecuencia directa de la Proposición 2.22 obtenemos la siguiente caracterización de la equivalencia de normas en un espacio vectorial.

Proposición 2.23 (criterio de equivalencia de normas)**.** Sean N_1, N_2 dos normas en el espacio vectorial $\mathbb{E}$. Los siguientes son equivalentes:

(i). Existen $m, M > 0$ tal que $mN_1(x) \le N_2(x) \le M\, N_1(x)$, para todo $x \in \mathbb{E}$.

(ii). Existen $m, M > 0$ tal que $B_2(0,m) \subset B_1(0,1) \subset B_2(0,M)$

(iii). $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Es inmediato ver, por la aserción (i), que dos normas equivalentes tienen los mismos conjuntos acotados. Utilizamos ahora este criterio para mostrar que todas las normas que hemos definido en el espacio $\mathbb{R}^d$ (véase Ejemplo 1.13 (i)) son equivalentes.

Corolario 2.24. *En el espacio* $\mathbb{R}^d$ *las normas*

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \qquad ||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2} \qquad y \qquad ||x||_\infty = \text{máx}\, \{|x_1|, \ldots, |x_d|\}$$

son equivalentes (véase Figura 2).

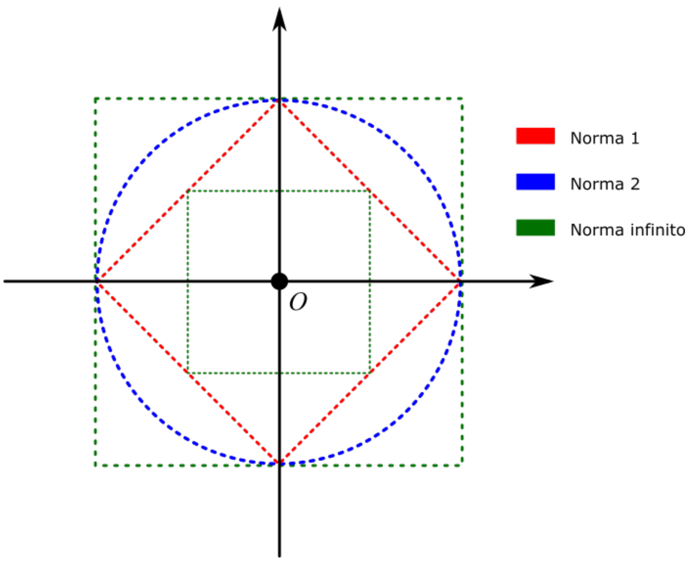

Figura 2: Ilustración de la equivalencia de las normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ en $\mathbb{R}^2$.

Demostración. Observamos primero que para todo $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene que

$$(||x||_2)^2 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 \le \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i| \right)^2 = (||x||_1)^2 ,$$

de donde se deduce $||x||_2 \leq ||x||_1$. Por otra parte, sea $i_0 \in \{1,\ldots,d\}$ tal que $||x||_\infty = |x_{i_0}|$. Entonces se tiene que:

$$||x||_\infty = \sqrt{|x_{i_0}|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^2} = ||x||_2 \quad \text{y} \quad ||x||_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \ \leq d\,|x_{i_0}| = d||x||_\infty$$

y se deduce:

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq d\,||x||_\infty \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

Concluimos por la Proposición 2.23 (i)$\Rightarrow$(iii). $\square$

Observación 2.25. (★) El Corolario 2.24 refleja una situación mucho más general:

$\boxed{\text{Todas las normas de un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.}}$

Además, esta propiedad caracteriza los espacios de dimensión finita: si $\mathbb{E}$ es un espacio vectorial de dimensión infinita, entonces existen normas N_1 y N_2 en $\mathbb{E}$ que no son equivalentes (es decir, que definen topologías distinctas).

La demostración de estos hechos está fuera de los objectivos de este apunte.

El siguiente ejercicio proporciona un ejemplo concreto de dos normas no equivalentes, definidas en el mismo espacio normado (necesariamente de dimensión infinita).

Ejercicio 2.26 (normas en $\mathcal{C}([0,1])$)**.** Sea $\mathcal{C}[0,1]$ el espacio de las funciones continuas $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ y consideramos las normas (véase Ejercicio 1.14)

$$||f||_1 := \int_0^1 |f(t)|dt \qquad \text{y} \qquad ||f||_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

Mostrar que $||f||_1 \leq ||f||_\infty$ pero que las normas no son equivalentes.

(*Indicación:* Considerar la siguiente sucesión de funciones continuas:

$$f_n(t) = \begin{cases} 2n - 2n^3 t, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n^2} \\ \\ 0, & \text{si } \frac{1}{n^2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

y observar que $||f_n||_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ mientras que $||f_n||_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.)

Ejercicio 2.27 (determinación de norma por la bola unitaria)**.** Mostrar que si dos normas definen las mismas bolas, entonces son iguales.

(*Indicación:* Sea $\mathbf{B} = \bar{B}(0,1) = \{x \in \mathbb{E} : N(x) \leq 1\}$ la bola cerrada unitaria de la norma N. Mostrar que $N(x) = \inf\{t \geq 0 : x \in t\mathbf{B}\}$.)

Ejemplo 2.28 (normas no provenientes de producto escalar). **(i).** Sea $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$ un espacio normado. Mostrar que si la norma $||\cdot||$ proviene de un producto escalar b, entonces es "estrictamente convexa", es decir:

$$\forall x, z \in \mathbb{E} \text{ con } ||x|| = ||z|| = 1 \text{ y } x \neq z \text{ y } \forall t \in (0,1): \quad ||tx + (1-t)z|| < 1.$$

(*Indicación:* Si $||x|| = ||z|| = 1$ y $x \neq z$, entonces $b(x,z) < 1 = ||x|| \cdot ||z||$.)
(ii). Deducir que las normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_\infty$ de $\mathbb{R}^d$ (Corolario 2.24) y las dos normas del Ejercicio 2.26 no pueden provenir de un producto escalar.

2.4. Caracterización de la convergencia en $\mathbb{R}^d$

En el Corolario 2.24 hemos visto que las tres normas introducidas en el Ejemplo 1.13 (i) son equivalentes, luego en la Observación 2.25 afirmamos que este es el caso para cualquier otra norma en $\mathbb{R}^d$. Esto permite hablar de la topología del espacio $\mathbb{R}^d$ sin precisar la norma utilizada. Lo mismo ocurre con la convergencia de sucesiones, que también es una noción topológica. Veremos ahora una caracterización simple de esta convergencia.
Notación: En lo que sigue, consideramos sucesiones de vectores $x_n \in \mathbb{R}^d$. Para evitar confusión por la presencia de dobles índices, anotaremos por $(x_n(1), \ldots, x_n(d))$ las coordenadas del vector $x_n \in \mathbb{R}^d$. Entonces, fijando la i-coordenada, se obtiene una sucesión $\{x_n(i)\}_{n\geq 1}$ de números reales, para todo $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Proposición 2.29 (convergencia en dimensión finita). Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{R}^d$ y $x = (x(1), \ldots, x(d)) \in \mathbb{R}^d$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i \in \{1, \ldots, d\}: \quad \lim_{n\to\infty} x_n(i) = x(i)$$

es decir, la convergencia de la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ (bajo cualquier norma) es equivalente a la convergencia coordenada-por-coordenada.

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos primero que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. En virtud del Corolario 2.24 es suficiente trabajar con la norma $||\cdot||_\infty$, es decir, $||x_n - x||_\infty \to \infty$. Fijamos un índice $i \in \{1, \ldots, d\}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que: $|x_n(i) - x(i)| \leq ||x_n - x||_\infty < \varepsilon$, por lo que se deduce que $\lim_{n\to\infty} x_n(i) = x(i)$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que para todo $i \in \{1, \ldots, d\}$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} x_n(i) = x(i)$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_i$ se tiene que $|x_n(i) - x(i)| < \varepsilon$. Ponemos $n_0 = \max\{n_1, \ldots n_d\}$ y observamos que para todo $n \geq n_0$ se debe tener

$$||x_n - x||_\infty := \max_{i\in\{1,\ldots,d\}} |x_n(i) - x(i)| < \varepsilon,$$

lo que demuestra el recíproco. □

2.5. Conjuntos (secuencialmente) compactos

La noción de *compacidad* es una noción primordial en topología. En el marco del estudio de espacios normados trabajaremos con una versión equivalente, la llamada *compacidad secuencial.* Para definir esta última noción necesitamos recordar la definición de sub-sucesión de una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de un espacio normado $(\mathbb{E}, ||\cdot||)$.

Definición 2.30 (sub-sucesión)**.** Sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{E}$. Llamamos sub-sucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$ cualquier sucesión $(y_n)_{n\geq 1}$ que cumple $y_n := x_{k(n)}$, para todo $n \geq 1$, donde $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una sucesión estrictamente creciente en los números naturales.

Notemos que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ es trivialmente una sub-sucesión de ella misma, tomando $k(n) = n$, para todo $n \geq 1$. Observamos también que si $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ es cualquier conjunto infinito, entonces la sucesión $(x_m)_{m\in\mathcal{N}}$ es una sub-sucesión de $(x_n)_{n\geq 1}$. En efecto, dado que $\mathcal{N}$ es un subconjunto infinito numerable de $\mathbb{N}$, se puede definir una biyección creciente $k : \mathbb{N} \to \mathcal{N}$ y por lo tanto $(x_m)_{m\in\mathcal{N}} \equiv (x_{k(n)})_{n\geq 1}$.

A continuación fijamos un espacio normado $(E, ||\cdot||)$ y consideramos una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ en $\mathbb{E}$.

Proposición 2.31. Las siguientes aserciones son equivalentes:

(i). La sucesión $(x_n)_n$ es convergente ;

(ii). Cada sub-sucesión de $(x_n)_n$ converge a un mismo límite ;

(iii). Cada sub-sucesión de $(x_n)_n$ es convergente.

Demostración. Las implicancias (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) son inmediatas. Mostramos a continuación la implicancia (iii)$\Longrightarrow$(ii). Tomamos dos sub-sucesiones $(x_{k_1(n)})_{n\geq 1}$ y $(x_{k_2(n)})_{n\geq 1}$ arbitrarias, y supongamos que $x_{k_1(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}$ y $x_{k_2(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{y}$. Sea $\mathcal{N} = k_1(\mathbb{N}) \cup k_2(\mathbb{N})$ y sea k la biyección creciente entre $\mathbb{N}$ y $\mathcal{N}$. La sub-sucesión correspondiente, $(x_{k(n)})_{n\geq 1}$, es convergente (por nuestra hipotesis (iii)) y su límite es único (*cf.* Ejercicio 2.12). Observen también que $\mathcal{N}_i = k_i(\mathbb{N}) \subset\mathcal{N} \equiv\mathbb{N}$ y por lo tanto $(x_{k_i(n)})_{n\geq 1}$ es sub-sucesión de $(x_{k(n)})_{n\geq 1}$ para $i \in \{1, 2\}$. Se deduce que $(x_{k_1(n)})_{n\geq 1}$ y $(x_{k_2(n)})_{n\geq 1}$ deben tener el mismo límite que $(x_{k(n)})_{n\geq 1}$, es decir, $\bar{x} = \bar{y}$. $\square$

Ejercicio 2.32. Mostrar que una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ **no converge** a $\bar{x} \in \mathbb{E}$ si y sólo si existe una sub-sucesión $(x_{k(n)})_{n\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ y $\varepsilon_0 > 0$ tal que $(x_{k(n)})_{n\geq 1} \subset \mathbb{E} \setminus B(\bar{x}, \varepsilon_0)$

(*Indicación.* Aplicar de forma iterativa la negación de la Proposición 2.11(ii) para obtener un conjunto infinito $\mathcal{N}$ tal que $||x_m - \bar{x}|| \geq \varepsilon_0$ para todo $m \in \mathcal{N}$.)

La siguiente definición es fundamental en topología y es la base de varios teoremas de existencia en análisis.

Definición 2.33 (compacidad secuencial)**.** Un conjunto $\Gamma \subset \mathbb{E}$ se dice (secuencialmente) compacto[4], si cada sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de Γ posee una sub-sucesión $(x_{k(n)})_{n\geq 1}$ convergente, cuyo límite pertenece en el conjunto Γ.

Notemos que el conjunto vacío cumple trivialmente la definición anterior, por lo tanto es compacto. Luego, es fácil ver que cada conjunto finito es compacto: en efecto, cada sucesión a valores finitos tiene una sub-sucesión constante.

Ejercicio 2.34. **(i)** Mostrar que unión finita de conjuntos compactos es compacto.
(ii). Mostrar que cada subconjunto cerrado de un compacto, también es compacto.

La siguiente proposición relaciona los conjuntos compactos con las nociones anteriores de conjuntos cerrados y conjuntos acotados.

Proposición 2.35 (compacto $\Longrightarrow$ cerrado y acotado)**.** En un espacio normado, cada conjunto compacto es cerrado y acotado.

Demostración. Sea Γ un conjunto compacto. Mostramos primero que Γ es cerrado. Sea $(x_n)_n \subset \Gamma$ una sucesión convergente con límite $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$. Por compacidad, se obtiene una sub-sucesión $(x_{k(n)})_{n\geq 1}$ convergente con límite $\bar{y} \in \Gamma$. Por la Proposición 2.31(ii), se tiene que $\bar{x} = \bar{y} \in \Gamma$, lo que permite concluir que Γ es cerrado, en virtud de la Proposición 2.17.
Mostramos ahora que Γ es acotado. Supongamos el contrapuesto. Entonces, para cada $n \geq 1$, existe $x_n \in \Gamma \setminus B(0,n)$, es decir $||x_n|| \geq n$. La sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ no posee ninguna sub-sucesión convergente, dado que todas sus sub-sucesiones son no acotadas. □

El recíproco de la proposición anterior es cierto en dimensión finita.

Proposición 2.36 (conjuntos compactos en dimensión finita)**.** En dimensión finita, un conjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Demostración. Dado que los conjuntos cerrados y los conjuntos acotados son los mismos cuando consideramos normas equivalentes, es suficiente establecer el resultado en el espacio normado $(\mathbb{R}^d, ||\cdot||_\infty)$. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto cerrado y acotado. Entonces existe $M > 0$ tal que

$$x = (x(1), \ldots, x(d)) \in \Gamma \quad \Longrightarrow \quad ||x||_\infty \leq M \quad \left(\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall i \in \{1, \ldots, d\} \\ -M \leq x(i) \leq M \end{cases} \right)$$

Sea $(x_n)_{n\geq 1} \subset \Gamma$ una sucesión arbitraria y consideramos la sucesión (de números reales) correspondiente a la primera coordenada $(x_n(1))_{n\geq 1} \subset [-M, M]$. Evocando el teorema de Bolzano-Weierstrass, se deduce que existe $a_1 \in [-M, M]$ y una función estrictamente

[4] En lo que sigue hablaremos por simplicidad de conjuntos compactos (en lugar de secuencialmente compactos). Formalmente la definición de compacidad es diferente (véase Observación 2.43) pero en nuestro contexto, las dos nociones son equivalentes.

creciente $k_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiendo una sub-sucesión $(x_{k_1(n)}(1))_{n\geq 1}$ tal que $x_{k_1(n)}(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_1$. Considerando ahora la sub-sucesión $(x_{k_1(n)}(2))_{n\geq 1} \subset [-M, M]$ correspondiente a la segunda coordenada, se deduce, igual que antes, la existencia de un real $a_2 \in [-M, M]$ y de una función estrictamente creciente $k_2 : k_1(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ definiendo una sub-subsucesión $(x_{(k_2\circ k_1)(n)}(2))_{n\geq 1}$ tal que $(x_{(k_2\circ k_1)(n)}(2))_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_2$. Observamos que $(x_{(k_2\circ k_1)(n)}(1))_{n\geq 1}$, siendo sub-subsesión de la sucesión $(x_{k_1(n)}(1))_{n\geq 1}$, también converge al mismo límite, es decir, $(x_{(k_2\circ k_1)(n)}(1))_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_1$. Continuando de la misma manera coordenada por coordenada, obtenemos funciones estrictamente crecientes $k_{p+1} : k_p(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, con $p \in \{1, \ldots, d-1\}$ y sub-sucesiones $(x_{(k_d\circ\ldots\circ k_1)(n)}(i))_{n\geq 1}$ tal que $(x_{(k_d\circ\ldots\circ k_1)(n)}(i))_{n\geq 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, d\}$. Poniendo $k = k_d \circ \ldots \circ k_1$ observamos que la sub-sucesión $(x_{k(n)})_{n\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ converge (por coordenadas) al vector $\bar{x} := (a_1, \ldots, a_d)$. En virtud de la Proposición 2.29, se deduce que $\lim_{n\to\infty} x_{k(n)} = \bar{x}$, y además, en virtud de la Proposición 2.17, $\bar{x} \in \Gamma$, dado que Γ es cerrado.

La demostración es completa. □

Damos a continuación un ejemplo de conjunto cerrado y acotado que no es compacto.

Ejemplo 2.37 (Bola unitaria cerrada de $c_0(\mathbb{N})$)**.** Sea $\mathbf{B} = \bar{B}(0, 1)$ la bola cerrada unitaria centrada en el origen del espacio normado $(c_0(\mathbb{N}), ||\cdot||_\infty)$ (cf. Ejemplo 1.5(v)). Es obvio que $\mathbf{B}$ es un conjunto cerrado y acotado. Mostramos que $\mathbf{B}$ no es compacto. Fijamos $n \geq 1$ y definimos la sucesión $e_n = (e_n(i))_{i\geq 1}$ como sigue:

$$e_n(i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = n \\ 0, & \text{si } i \neq n. \end{cases} \tag{12}$$

Observamos que $||e_n||_\infty = 1$, para todo $n \geq 1$, por lo tanto $(e_n)_{n\geq 1} \subset \mathbf{B}$. Por otra parte,

$$||e_n - e_m||_\infty = 1, \qquad \text{si } n \neq m,$$

de lo que se deduce que $(e_n)_{n\geq 1}$ no puede tener sub-sucesiones convergentes.

Observación 2.38 (compacidad de la bola)**. (★)** El Ejemplo 2.37 no refleja una situación especifica del espacio $(c_0(\mathbb{N}), ||\cdot||_\infty)$ sino más bien la situación general en dimensión infinita. En realidad, en cada espacio normado de dimensión infinita, existen sucesiones acotadas sin subsucesiones convergentes[5]. En otras palabras, la compacidad de la bola unitaria cerrada es una caracteristica de los espacios de dimensión finita, es decir:

ün espacio normado es de dimensión finita si y solo si las bolas cerradas son conjuntos compactos."(La demostración está fuera de los objetivos de este apunte.)

[5]Para remediar eso, en dimensión infinita se usar de forma frecuente otras topologías, más débiles (ie. con menos conjuntos abiertos) que la topología de la norma, lo que facilita la convergencia de sucesiones y aumenta la cantidad de los conjuntos compactos.

A continuación, mencionamos unas propiedades importantes de los conjuntos compactos.

Proposición 2.39 (Compactos encajonados)**.** Sea $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una familia decreciente de conjuntos compactos no vacíos. Entonces la intersección es un conjunto compacto no vacío. En otras palabras,

$$\left.\begin{array}{c}\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \ldots \supset \Gamma_i \supset \ldots \\ \Gamma_i \neq \emptyset \quad \text{compacto}\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i \neq \emptyset \quad \text{compacto.}$$

Demostración. Por la Proposición 2.35, los conjuntos $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son cerrados, y por la Proposición 2.8 (iii) el conjunto $\Gamma = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i$ también lo es, por lo tanto es compacto (*cf.* Ejercicio 2.34).

Mostramos ahora que Γ no es vacío. Para eso, para cada $n \geq 1$, tomamos un elemento $x_n \in \Gamma_n$. Observamos que la sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ siendo una sucesión del conjunto compacto Γ_1 posee una subsucesión $(x_{k(n)})_{n\geq 1}$ que converge a un elemento $\bar{x} \in \Gamma_1$. Mostraremos que $\bar{x} \in \Gamma$, es decir, que $\bar{x} \in \Gamma_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

En efecto, fijando $i \geq 1$, basta observar que $(x_{k(n)})_{n\geq i} \subset \Gamma_i$. Dado que $(x_{k(n)})_{n\geq i}$ converge a $\bar{x}$ (como sub-subsucesión de la sub-sucesión convergente $(x_{k(n)})_{n\geq 1}$) y que Γ_i es cerrado, se deduce el resultado. $\square$

Los siguientes ejemplos muestran que la hipotesis de compacidad es esencial para la validez del resultado anterior.

Ejemplo 2.40 (falso para cerrados/acotados encajonados)**.**

(i) Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ y $K_n = [n, +\infty)$, $n \geq 1$. Entonces $(K_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset$.

(ii). Sea $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ y $A_n = (0, \frac{1}{n}]$, $n \geq 1$. Entonces $(A_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de conjuntos acotados no vacíos y $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

(iii). (dimensión infinita) Sea $\mathbb{E} = (c_{00}(\mathbb{N}), ||\cdot||_\infty)$ el espacio normado de sucesiones eventualmente nulas (cf. Ejemplo 1.5(v)). Anotemos por $e_n = (e_n(i))_{i\geq 1} \in c_{00}(\mathbb{N})$ es la sucesión definida por (12) y por $\mathbf{F}_n = [e_m : m \geq n]$ la clausura del espacio vectorial generado por los vectores $\{e_n, e_{n+1}, \ldots\}$, donde $n \geq 1$. Sea $\mathbf{S}_n$ la intersección de la esfera unitaria $S(0,1)$ de $c_{00}(\mathbb{N})$ con el subespacio cerrado $\mathbf{F}_n$, es decir:

$$\mathbf{S}_n = S(0,1) \cap \mathbf{F}_n := \{x \in \mathbf{F}_n : \|x\|_\infty = 1\}.$$

Observamos que $\{\mathbf{S}_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos, cerrados y acotados, sin embargo, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{S}_n = \emptyset$.

Corolario 2.41 (Propiedad de intersección finita)**.** *Sea* $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *una familia de conjuntos compactos con la propiedad de que la intersección de cada sub-familia finita es no vacía. Entonces, la intersección de toda la familia es un conjunto (compacto) no vacío. En otras palabras,*

$$\forall F \underset{\textit{finito}}{\subset} \mathbb{N}\,,\quad \bigcap_{i\in F}\Gamma_i \neq \emptyset \quad\Longrightarrow\quad \bigcap_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i \neq \emptyset$$

Demostración. Ponemos $\hat{\Gamma}_1 = \Gamma_1$, luego

$$\hat{\Gamma}_n = \Gamma_1 \cap \ldots \cap \Gamma_n\,, \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

Se obtiene una sucesión de compactos encajonados $\{\hat{\Gamma}_n\}_{n\geq 1}$. Por hipotesis, $\hat{\Gamma}_n \neq \emptyset$, para cada $n \geq 1$, y por construcción

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}}\hat{\Gamma}_i.$$

Concluimos por la Proposición 2.39. □

Corolario 2.42 (recubrimiento finito)**.** *Sea* Γ *un conjunto compacto y* $\{\mathcal{U}_n\}_{n\geq 1}$ *una familia de abiertos tal que* $\Gamma \subset \bigcup_{n\geq 1}\mathcal{U}_n$*. Entonces existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{k}\mathcal{U}_i.$$

En otras palabras, cada recubrimiento numerable de Γ *por conjuntos abiertos admite un sub-recubrimiento finito.*

Demostración. Supongamos, por contradicción, que para cada $n \geq 1$,

$$\Gamma \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{U}_i \quad\Longleftrightarrow\quad K_n = \Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{U}_i \neq \emptyset.$$

El conjunto K_n es un subconjunto cerrado de Γ, por lo tanto compacto (Ejercicio 2.34) y $\{K_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de conjuntos no vacíos, compactos y encajonados. Concluimos por la Proposición 2.39 que

$$\bigcap_{n\geq 1}K_n = \Gamma \setminus \bigcup_{n\geq 1}\mathcal{U}_n \neq \emptyset$$

lo que contradice la hipotesis inicial. □

Observación 2.43 (definición topológica de la compacidad)**. (★)**
La Proposición 2.39, así como los Corolarios 2.41 y 2.42 siguen válidos para familias arbitrarias (no necesariamente numerables), pero la demostración está fuera del alcance de este apunte. Dicha generalización del resultado del Corolario 2.42 corresponde a la definición auténtica de la compacidad, que es puramente topológica:
"Un conjunto es compacto si y sólo si para cada *recubrimiento abierto*[6] existe un sub-recubrimiento finito."

[6] *recubrimiento abierto* es un pequeño abuso de terminología: se refiere a una familia de conjuntos abiertos cuya unión contiene el conjunto.

3. Funciones entre espacios normados

En esta sección estudiaremos funciones definidas entre espacios normados y definiremos la noción de continuidad, continuidad uniforme y continuidad Lipschitz.

3.1. Continuidad de funciones, ejemplos

Sean dos espacios normados $(X, ||\cdot||_X)$ e $(Y, ||\cdot||_Y)$. Cuando no es necesario especificar la norma, anotaremos dichos espacios simplemente por X e Y. Anotemos también por $\mathcal{T}^X$ y $\mathcal{T}^Y$ las topologías correspondientes, y por $\mathcal{T}^X_{\bar{x}}$ (respectivamente, $\mathcal{T}^Y_{\bar{y}}$) las vecindades abiertas de un punto $\bar{x} \in X$ (respectivamente, de un punto $\bar{y} \in Y$).

Definición 3.1 (continuidad). Decimos que una función $f : X \to Y$ es continua en un punto $\bar{x} \in X$ si

$$\forall \mathcal{U} \in \mathcal{T}^Y_{f(\bar{x})}, \exists \mathcal{V} \in \mathcal{T}^X_{\bar{x}} \text{ tal que: } f(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}. \tag{13}$$

La función f se dice continua, si es continua en cada $x \in X$.

Se puede apreciar que la definición de continuidad es una definición puramente topológica. Sin embargo, se puede presentar también en términos de bolas (Figura 3), o incluso directamente de las normas, véase el siguiente ejercicio.

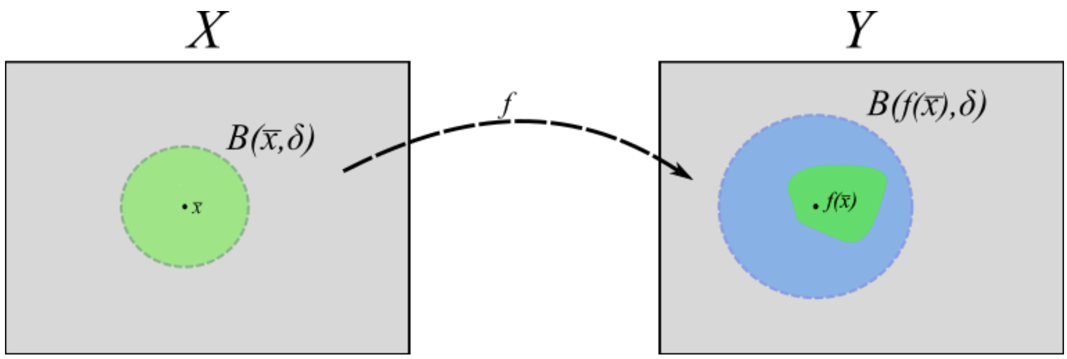

Figura 3: Ilustración de la continuidad de $f : X \to Y$ en $\bar{x} \in X$.

Ejercicio 3.2 (Continuidad mediante bolas). Mostrar que (13) es equivalente a lo siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que: } f(B(\bar{x}, \delta)) \subset B(f(\bar{x}), \varepsilon). \tag{14}$$

o de forma equivalente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que: } ||x - \bar{x}||_X < \delta \Longrightarrow ||f(x) - f(\bar{x})||_Y < \varepsilon. \tag{15}$$

A continuación dimos una definición alternativa de la continuidad, que llamaremos temporalmente *continuidad secuencial*, porque está basada en convergencia de sucesiones. A pesar de la nueva terminología, mostraremos que se trata de una definición equivalente de la continuidad.

Definición 3.3 (continuidad secuencial)**.** Decimos que una función $f : X \to Y$ es secuencialmente continua en un punto $\bar{x} \in X$ si para cada sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de X con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x})$.

En el siguiente resultado mostramos que la continuidad secuencial (Definición 3.3) es equivalente a la continuidad (Definición 3.1) para funciones entre espacios normados[7].

Proposición 3.4. Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios normados y $\bar{x} \in X$. Los siguientes son equivalentes:
(i). f es continua en $\bar{x}$;
(ii). f es secuencialmente continua en $\bar{x}$.

Demostración. (i)$\Longrightarrow$(ii). Supongamos que f es continua en $\bar{x}$ y (por contradicción) que existe una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de X con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ tal que la sucesión imagen $(f(x_n))_{n\geq 1}$ no converge a $f(\bar{x})$. Aplicando el resultado del Ejercicio 2.32, deducimos que existe $\varepsilon_0 > 0$ y una sucesión estrictamente creciente $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiendo una sub-sucesión

$$f(x_{k(n)})_{n\geq 1} \subset Y \setminus B(f(\bar{x}), \varepsilon_0).$$

Aplicando (14), obtenemos $\delta > 0$ tal que:

$$f(B(\bar{x}, \delta)) \subset B(f(\bar{x}), \varepsilon_0).$$

Eso es contradictorio, porque si n es suficientemente grande, se debe tener $x_{k(n)} \in B(\bar{x}, \delta)$ y por lo tanto $f(x_{k(n)}) \in f(B(\bar{x}, \delta)) \subset B(f(\bar{x}), \varepsilon_0)$.
(ii)$\Longrightarrow$(i). Supongamos que f no es continua en $\bar{x}$ y por lo tanto (15) no es cierta. Por lo tanto, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $n \geq 1$ y $\delta_n = 1/n$, existe $x_n \in X$ con $||x_n - \bar{x}||_X < \delta_n$ y $||f(x_n) - f(\bar{x})||_Y \geq \varepsilon_0$. Se define entonces una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de X con

$$||x_n - \bar{x}||_X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{y} \qquad ||f(x_n) - f(\bar{x})||_Y \geq \varepsilon_0,$$

lo que contradice (ii). $\square$

Observación 3.5 (función a valores en dimensión finita)**.** En el caso particular que $Y = \mathbb{R}^\ell$, la función f tiene como valores vectores con ℓ-coordenadas. Se pueden definir funciones $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ tal que $f = (f_1, \ldots, f_\ell)$. En este caso, el resultado anterior y la Proposición 2.29 muestran que f es continua (en $\bar{x}$) si y sólo si f_i es continua (en $\bar{x}$) para todo $i \in \{1, \ldots, \ell\}$.

Veamos ahora unos ejemplos donde se aplica la Proposición 3.4 y la Observación 3.5.

[7]Esta afirmación sigue cierta en espacios más generales (espacios métricos), pero no en todos los espacios topológicos.

Ejemplo 3.6 (curvas continuas)**. (i).** La función $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

es (una curva) continua, dado que las "funciones coordenadas" $\gamma_1(t) = \cos t$, $\gamma_2(t) = \sin t$ y $\gamma_3(t) = t$ son funciones continuas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$..
(ii). La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (\sin y, \exp(x+y^2))$, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es continua. En efecto, fijando $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (arbitrario) y tomando $(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (x, y)$, se tiene que

$$f_1(x_n, y_n) = \sin(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sin(y) = f_1(x, y)$$

lo que muestra la continuidad de la primera coordenada $f_1(x, y) = \sin(y)$. Luego, poniendo $z_n := x_n + y_n^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x + y^2 := z$ y utilizando la continuidad de la función exponencial, se deduce:

$$f_2(x_n, y_n) = \exp(x_n + y_n^2) = \exp(z_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(z) = \exp(x + y^2) = f_2(x, y),$$

es decir, la segunda coordenada $f_2(x, y) = \exp(x + y^2)$ es continua.

Por lo anterior, queda claro que el estudio de continuidad de funciones entre espacios de dimensión finita se puede resumir al estudio de funciones a valores reales. Veamos a continuación un tal ejemplo, donde la función está definida por trozos.

Ejemplo 3.7 (funciones entre espacios de dimensión finita)**.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada (en coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) por la formula:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Veamos que f es continua en cada punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$. Consideramos primero el caso $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0, 0)$. Sea $\{(x_n, y_n)\}_{n\geq 1}$ una sucesión convergente a $(\bar{x}, \bar{y})$, eso es, $x_n \longrightarrow \bar{x}$ y $y_n \longrightarrow \bar{y}$. Por lo tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $x_n \neq 0$ (si $\bar{x} \neq 0$) o $y_n \neq 0$ (si $\bar{y} \neq 0$). Se deduce que la sucesión

$$f(x_n, y_n) = \frac{x_n y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}, \qquad n \geq n_0$$

está bien definida y converge, cuando $n \longrightarrow \infty$, al número real

$$\frac{\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}} = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

Consideramos ahora el caso $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. En este caso, gracias a la desigualdad

$$(x - y)^2 \geq 0 \iff \frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy \tag{16}$$

deducimos que

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\left\|(x,y)\right\|_2 .$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\|(x,y)\|_2\to 0} |f(x,y)-f(0,0)| = 0$$

lo que muestra que f es continua en $(0,0)$.

Como se evidencia de los ejemplos anteriores, de manera general, si una función está definida en un dominio abierto mediante una formula algebraica, entonces, la función es continua en este dominio[8]. Por otra parte, funciones definidas por trozos, pueden presentar fallos de continuidad en los puntos de ramificación (véase (i) del siguiente ejemplo).

Ejercicio 3.8. Estudiar la continuidad en el punto $(0,0)$ de las siguientes funciones:

(i). $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(*Indicación*: Calcular el límite $\lim_{t\to 0} f(t,t)$.)

(ii). $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(*Indicación*: Usar la desigualdad (16).)

(iii). $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(*Indicación*: Recordar que $|\sin y| \leq |y|$.)

(iv). $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(\cos y-1)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(*Indicación*: Calcular y usar el límite $\lim_{y\to 0} \frac{\cos y - 1}{y^2}$.)

[8]Más adelante se verá que una tal función será diferenciable (incluso analítica real).

3.2. Propiedades de funciones continuas, aplicaciones

En esta sección veremos propiedades caracteristicas de funciones continuas con respecto a nociones topologicas (conjuntos abiertos, cerrados, compactos). En lo que sigue, el lector puede observar que la estructura vectorial es irrelevante para establecer estas propiedades, que en realidad quedan válidas en un marco mucho más general.

Proposición 3.9 (Caracterización topológica de la continuidad)**.** Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios normados. Los siguientes son equivalentes:
(i). f es continua ;
(ii). Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{T}^Y$ se tiene que $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}^X$
(es decir, pre-imagen de abierto es abierto) ;
(iii). Para cada $F \subset Y$ cerrado, se tiene que $f^{-1}(F)$ es cerrado en X
(es decir, pre-imagen de cerrado es cerrado).

Demostración. (i)$\Longrightarrow$(ii). Sea f una función continua y $\mathcal{U}$ un conjunto abierto de Y. Mostramos que $f^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en X. Podemos suponer que $f^{-1}(\mathcal{U}) \neq \emptyset$ (sino, sería trivialmente un abierto). Sea $\bar{x} \in f^{-1}(\mathcal{U})$ (elemento arbitrario). Entonces $f(\bar{x}) \in \mathcal{U}$ y (dado que $\mathcal{U}$ es abierto) existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(\bar{x}), \varepsilon) \subset \mathcal{U}$. Aplicando (14), deducimos la existencia de $\delta > 0$ tal que $f(B(\bar{x}, \delta)) \subset B(f(\bar{x}), \varepsilon) \subset \mathcal{U}$, es decir $B(\bar{x}, \delta) \subset f^{-1}(\mathcal{U})$, lo que muestra que $f^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto.
(ii)$\Longrightarrow$(i). Suponiendo (ii), vamos a mostrar que f es continua en X. Fijamos $\bar{x} \in X$, $\varepsilon > 0$ y ponemos $\mathcal{U} = B(f(\bar{x}), \varepsilon)$. Observamos que $\mathcal{U} \in \mathcal{T}^Y$ y por lo tanto $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}^X$. Dado que $\bar{x} \in f^{-1}(\mathcal{U})$, deducimos por (11) que existe $\delta > 0$ con $B(\bar{x}, \delta) \subset f^{-1}(\mathcal{U})$, por lo que se concluye que $f(B(\bar{x}, \delta)) \subset \mathcal{U}$ es decir, se cumple (13).
(ii)$\Longleftrightarrow$(iii). Observamos que $\mathcal{U} \in \mathcal{T}^Y$ si y sólo si $F := Y \setminus \mathcal{U}$ es cerrado, luego

$$f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus \mathcal{U}) = X \setminus f^{-1}(\mathcal{U}) \quad \text{y} \quad f^{-1}(\mathcal{U}) = f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F).$$

Las relaciones anteriores permiten concluir fácilmente. $\square$

El resultado anterior permite detectar/reconocer fácilmente conjuntos cerrados (respectivamente, abiertos) definidos mediante relaciones de desigualdad (respectivamente, desigualdad estricta). Ilustraremos lo anterior mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.10 (reconocer abiertos/cerrados)**. (i).** Consideramos el conjunto

$$\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < x^2 < y\}.$$

Definimos $\Phi_1, \Phi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas dadas por las formulas:

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y) = y - x^2 \\ \Phi_2(x, y) = x^2 - 1 \end{cases} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Es fácil ver que

$$\mathcal{U} = \Phi_1^{-1}(\mathcal{J}) \cap \Phi_2^{-1}(\mathcal{J}), \quad \text{donde } \mathcal{J} = (0, +\infty) \text{ es un abierto de } \mathbb{R},$$

por lo tanto $\mathcal{U}$ es abierto, en virtud de la Proposición 3.9(ii) y la Proposición 2.5(iii).

(ii). El conjunto

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z \geq x^2 + y^2\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}^3$ ya que es la pre-imagen del subconjunto cerrado $[0, +\infty)$ de $\mathbb{R}$ por la función continua $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $\Phi(x, y, z) = z - (x^2 + y^2)$.

La siguiente proposición asegura que "imagen continua de compacto es compacto" y será de suma importancia en resultados de existencia de puntos extremos.

Proposición 3.11 (imagen continua de compactos)**.** Sea $f : X \to Y$ una función continua y $K \subset X$ un conjunto compacto. Entonces $f(K)$ es compacto.

Demostración. Podemos suponer que $f(K) \neq \emptyset$. Sea $\{y_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión arbitraria del conjunto $f(K)$. Entonces, para cada $n \geq 1$, existe $x_n \in K$ con $y_n = f(x_n)$. La sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ se encuentra dentro el conjunto compacto K, por lo tanto tiene una sub-sucesión $\{x_{k(n)}\}_{n\geq 1}$ convergente, con límite $\bar{x} \in K$. Por la Proposición 3.4 deducimos que $f(x_{k(n)})_n \equiv \{y_{k(n)}\}_n$ converge a $\bar{y} := f(\bar{x}) \in K$, de donde concluimos que $f(K)$ es compacto. $\square$

Una consequencia de la proposición anterior es el llamado "Teorema de Weierstrass" que asegura que cada función continua a valores reales alcanza sus valores máximo y mínimo en cada compacto, no vacío.

Corolario 3.12 (Teorema de Weierstrass)**.** *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y $K \neq \emptyset$ un subconjunto compacto de X. Entonces existen $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in K$ tales que*

$$f(\bar{x}_1) \leq f(x) \leq f(\bar{x}_2), \qquad \textit{para todo } x \in K. \tag{17}$$

Demostración. Por la Proposición 3.11 $f(K)$ es un subconjunto compacto, no vacío de $\mathbb{R}$. En particular, siendo no vacio y acotado, se tiene que

$$-\infty < m := \inf f(K) \leq M := \sup f(K) < +\infty.$$

Observamos que $m, M \in \overline{f(K)} = f(K)$, por lo que se deduce (17) $\square$

En teorema anterior es un resultado de existencia de puntos extremos de una función continua restringida en un conjunto compacto, lo que correspondría a un problema de optimización con restricciones. A continuación, presentaremos un segundo resultado de existencia, esta vez de un mínimo global, en todo el espacio (optimización sin restricciones). Para eso, necesitaremos primero la siguiente definición.

Definición 3.13 (función coerciva)**.** Una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice *coerciva*, si para cada $M > 0$, existe $r > 0$ tal que para todo $x \in X$ con $||x|| > r$ se tiene que $f(x) > M$. La propiedad anterior se puede interpretar[9] como sigue:

$$\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = +\infty.$$

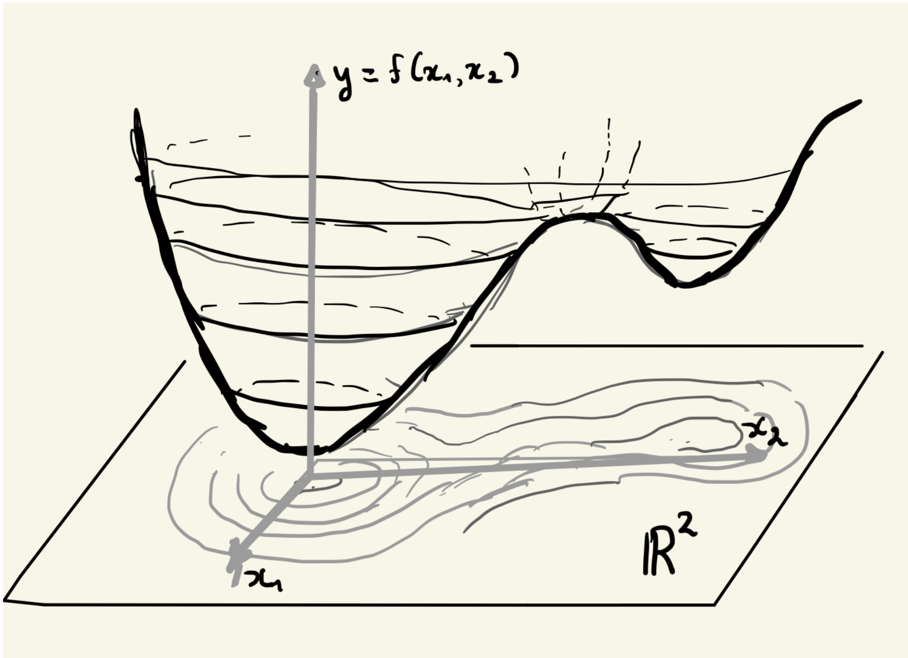

Figura 4: Ilustración de una función coerciva $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Proposición 3.14 (conjuntos subniveles)**.** La función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es coerciva si y sólo si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto subnivel

$$[f \leq \lambda] := \{x \in X : \; f(x) \leq \lambda\}$$

de f es acotado.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el conjunto $[f \leq \lambda]$ no es acotado. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ con $f(x_n) \leq \lambda$ y $||x_n|| \to \infty$, lo que contradice la definición de coercividad de f.

($\Longrightarrow$) Supongamos ahora que todos los sub-niveles de f son conjuntos acotados. En particular, para cada $M > 0$, el conjunto $[f \leq M]$ debe ser acotado, es decir, existe $r > 0$ tal que para todo $x \in X$ se tiene que

$$(x \in [f \leq M] \iff) \; f(x) \leq M \Longrightarrow ||x|| \leq r,$$

[9]Para una justificación más rigurosa se debe añadir el punto infinito "∞" al espacio X, asignándole como vecindades los conjuntos abiertos $X \setminus \bar{B}(0, r)$, $r > 0$ (compactificación de Alexandroff), luego los puntos "$+\infty$" y "$-\infty$" en $\mathbb{R}$ con vecindades $(M, +\infty)$ y $(-\infty, -M)$, $M > 0$, respectivamente.

o de forma equivalente

$$||x|| > r \Longrightarrow f(x) > M,$$

lo que muestra que f es coerciva. □

Corolario 3.15 (Minimización de funciones coercivas)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función continua y coerciva. Entonces existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ (mínimo global de f) tal que*

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \qquad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^d. \tag{18}$$

Demostración. Sea $\lambda > \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}^d\}$. Entonces el conjunto $[f \leq \lambda]$ (λ-subnivel de f) no es vacío. Además, dicho conjunto es cerrado (como pre-imagen del subconjunto cerrado $(-\infty, \lambda]$ de $\mathbb{R}$ por la función continua f, *cf.* Proposición 3.9(iii)) y acotado (Proposición 3.14), por lo tanto compacto (Proposición 2.36). Aplicando el Corolario 3.12 deducimos que existe $\bar{x} \in [f \leq \lambda]$ (ie. $f(\bar{x}) \leq \lambda$) tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \qquad \text{para todo } x \in [f \leq \lambda].$$

Observando que para todo $x \in \mathbb{R}^d \setminus [f \leq \lambda]$, se tiene que $f(x) > \lambda \geq f(\bar{x})$, deducimos que (18) se cumple. □

Ejercicio 3.16 (contrejemplos)**.** Dar ejemplos para las siguientes afirmaciones:

(i). Imagen continua de abierto no es necesariamente abierto.
(*Indicación*: $f(t) = t^2$, $\mathcal{U} = (-1, 1)$.)

(ii). Pre-imagen continua de compacto no es necesariamente compacto.
(*Indicación*: $f(t) = 1$, $K = \{1\}$.)

(iii). Una función que mapea compactos en compactos no es necesariamente continua.
(*Indicación*: $f(t) = 1$, si $t > 0$ y $f(t) = 0$, si $t \leq 0$.)

3.3. Cálculo con funciones continuas

En esta parte veremos que la continuidad es una propiedad que se comporta bien bajo operaciones habituales de funciones (combinación lineal, composición etc). En esta parte, anotaremos los espacios normados involucrados simplemente por X, Y, Z sin referencia explicita a sus normas.

Mostramos primero que las funciones definidas en X a valores en Y que son continuas en un punto $\bar{x} \in X$ forman un espacio vectorial.

Proposición 3.17 (combinación lineal)**.** Sean $f, g : X \to Y$ dos funciones continuas en $\bar{x} \in X$. Entonces para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la función

$$\begin{cases} \lambda f + \mu g : X \to Y \\ (\lambda f + \mu g)(x) := \lambda f(x) + \mu g(x), \quad \forall x \in X \end{cases}$$

es continua en $\bar{x} \in X$.

Demostración. Supongamos que las funciones f, g son continuas en $\bar{x}$ y mostramos que lo mismo ocurre para la función $x \mapsto (\lambda f + \mu g)(x)$. Sea $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ una sucesión convergente a $\bar{x} \in X$. Por la continuidad secuencial de las funciones f y g se deduce que $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\bar{x})$ y $g(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(\bar{x})$. Entonces para la sucesión $\{\lambda f(x_n) + \mu g(x_n)\}_{n\geq 1}$ se deduce:

$$\|\lambda f(x_n) + \mu g(x_n) - (\lambda f(\bar{x}) + \mu g(\bar{x}))\| \leq |\lambda| \, ||f(x_n) - f(\bar{x})|| + |\mu| \, ||g(x_n) - g(\bar{x})|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

es decir, la función $\lambda f + \mu g$ es continua en $\bar{x}$. □

Se deduce inmediatamente que la familia de las funciones continuas de X a Y

$$\mathcal{C}(X, Y) = \{f : X \to Y \text{ continua}\}$$

es un subespacio vectorial del espacio vectorial Y^X (de todas las funciones definidas en X a valores en Y).

La siguiente proposición muestra que composición de funciones continuas es una función continua.

Proposición 3.18 (composición)**.** Sea $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ dos funciones continuas en $\bar{x} \in X$ y respectivamente, en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in Y$. Entonces la composición

$$\begin{cases} h = g \circ f : X \to Z \\ h(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in X \end{cases}$$

es continua en $\bar{x} \in X$.

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ una sucesión convergente a $\bar{x} \in X$. Por la continuidad secuencial de la función f se deduce que $y_n := f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(\bar{x}) = \bar{y}$, luego por la continuidad secuencial de la función g que $g(f(x_n)) = g(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(\bar{y}) = g(f(\bar{x}))$. Eso establece la continuidad secuencial de la función $h = g \circ f$ en $\bar{x}$. □

Ejercicio 3.19 (producto de funciones)**.** Sean $f, g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\bar{x} \in X$. Mostrar que la función producto[10]

$$\begin{cases} (fg) : X \to \mathbb{R} \\ (fg)(x) := f(x)g(x), \quad \forall x \in X \end{cases}$$

es continua en $\bar{x}$.

[10] Observar que las funciones f y g toman valores reales (lo que se usa para definir su producto).

3.4. Continuidad uniforme

En esta sección presentaremos propiedades métricas para funciones definidas entre espacios normados, que son más fuertes que la continuidad. Fijamos una función $f : X \to Y$ entre los espacios normados $(X, ||\cdot||_X)$ e $(Y, ||\cdot||_Y)$. La primera propiedad que vamos a considerar es una versión fuerte de la propiedad (15), en el sentido que el requerido $\delta > 0$ no depende del punto $\bar{x}$ sino sólo de la elección de $\varepsilon > 0$.

Definición 3.20 (continuidad uniforme)**.** Sea $K \subset X$ un subconjunto no vacío. La función $f : X \to Y$ se dice uniformemente continua en K si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, z \in K \text{ se tiene: } ||x - z||_X < \delta \Longrightarrow ||f(x) - f(z)||_Y < \varepsilon. \tag{19}$$

Es fácil ver que cada función continua es uniformemente continua en conjuntos finitos. Mostraremos que lo mismo ocurre con los conjuntos compactos. Para eso, necesitaremos primero la siguiente caracterización.

Proposición 3.21 (caracterización de la continuidad uniforme)**.** La función $f : X \to Y$ es uniformemente continua en $K \subset X$ si y sólo si para cada par de sucesiones $\{x_n\}_{n\geq 1}$ y $\{z_n\}_{n\geq 1}$ de K se tiene que

$$||x_n - z_n||_X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad ||f(x_n) - f(z_n)||_Y \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{20}$$

Demostración. Supongamos primero que f es uniformemente continua en K y tomamos dos sucesiones $\{x_n\}_{n\geq 1}$ y $\{z_n\}_{n\geq 1}$ en K con $||x_n - z_n||_X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Nuestro objetivo es mostrar que $||f(x_n) - f(z_n)||_Y \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Para eso, consideramos $\varepsilon > 0$ (arbitrario) y el correspondiente $\delta > 0$ dado por la formula (19). Por nuestra hipotesis, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$ se tiene que $||x_n - z_n||_X < \delta$, y en virtud de (19), $||f(x_n) - f(z_n)||_Y < \varepsilon$, lo que muestra lo pedido.

Supongamos ahora que (20) es cierta para cada par de sucesiones $\{x_n\}_{n\geq 1}$ y $\{z_n\}_{n\geq 1}$ en K y por contradicción, negamos la validez de (19). Entonces, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $n \geq 1$ y $\delta_n = 1/n$, existen elementos $x_n, z_n \in K$ con

$$||x_n - z_n||_X < \delta_n \quad \text{ y } \quad ||f(x_n) - f(z_n)||_Y \geq \varepsilon_0.$$

Lo anterior contradice nuestra hipotesis, dado que $||x_n - z_n||_X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Antes de continuar, aprovechamos del resultado anterior para presentar un ejemplo de función continua que no es uniformemente continua.

Ejemplo 3.22 (continua $\not\Rightarrow$ uniformemente continua)**.** La función (continua) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Efectivamente, tomando $x_n = n + \frac{1}{n}$ y $z_n = n$ para todo $n \geq 1$, observamos que $|x_n - z_n| = \frac{1}{n} \to 0$ mientras que $|f(x_n) - f(z_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$, por lo tanto (20) no se cumple.

En el ejemplo anterior observamos que el fallo de la continuidad uniforme se encuentra al infinito. En particular, las sucesiones consideradas se acercan entre ellas, pero no convergen (van al infinito). Esto claramente no puede ocurrir si estan limitadas en un conjunto compacto. Mostramos a continuación el resultado principal de esta parte.

Proposición 3.23 (continuidad en los compactos)**.** Sea $f : X \to Y$ una functión continua y $K \subset X$ un conjunto compacto no vacío. Entonces f es uniformemente continua en K.

Demostración. Supongamos por contradicción que f no es uniformemente continua en K. Entonces deducimos por la Proposición 3.21 que existen sucesiones $\{x_n\}_{n\geq 1}$ y $\{z_n\}_{n\geq 1}$ en K con $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - z_n||_X = 0$ tales que la sucesión $\{||f(x_n) - f(z_n)||\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ no converge a 0. Pasando a una sub-sucesión (que continuamos anotando igual que antes) podemos suponer que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$||f(x_n) - f(z_n)|| \geq \varepsilon_0 \tag{21}$$

(véase también Ejercicio 2.32).

La sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset K$, siendo dentro de un compacto, dispone una sub-sucesión $\{x_{k_1(n)}\}_{n\geq 1}$ que converge a un elemento $\bar{x} \in K$. Consideramos ahora la sucesión $\{z_{k_1(n)}\}_{n\geq 1} \subset K$ (que es una sub-sucesión de $\{z_n\}_{n\geq 1}$) y deducimos, con el mismo argumento, la existencia de una subsucesión $\{z_{k_2(k_1(n))}\}_{n\geq 1}$ convergente a un elemento $\bar{z} \in K$. Poniendo $k = k_2 \circ k_1$, obtenemos entonces dos (sub-)sucesiones convergentes $\{x_{k(n)}\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}$ y $\{z_{k(n)}\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{z}$. Observamos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_{k(n)} - z_{k(n)}\right) = \bar{x} - \bar{z} \qquad \text{y (por hipotesis)} \quad \lim_{n\to\infty} \left(x_{k(n)} - z_{k(n)}\right) = 0,$$

por lo tanto $\bar{x} = \bar{z}$. Evocando ahora la continuidad (secuencial) de la función f deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k(n)}) = f(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} f(z_{k(n)}).$$

Lo anterior contradice claramente (21), y muestra que f tiene que ser uniformemente continua en K. $\square$

3.5. Continuidad Lipschitz

A continuación, introducimos una nueva noción de continuidad, que será aún más fuerte que la continuidad uniforme.

Definición 3.24 (continuidad Lipschitz)**.** Una función $f : X \to Y$ se dice Lipschitz continua si

$$\exists k > 0,\ \forall x, z \in X \ \text{ se tiene:} \quad ||f(x) - f(z)||_Y \leq k\, ||x - z||_X\,. \tag{22}$$

Es inmediato ver que si una función es Lispchitz continua, entonces también es uniformemente continua. (Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta := \varepsilon/k$ y aplicar (22)). El siguiente ejemplo muestra que el reciproco es falso.

Ejemplo 3.25 (uniformemente continua $\not\Rightarrow$ Lipschitz)**.** La función $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, es continua y por lo tanto uniformemente continua en cada intervalo compacto (*cf.* Proposición 3.23). Mostramos, usando la Proposición 3.21, que f es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$. Sera $\{x_n\}_{n\geq 1}$ y $\{z_n\}_{n\geq 1}$ dos sucesiones en $\mathbb{R}$ con

$$|x_n - z_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Si $\{x_{k(n)}\}_{n\geq 1}$ es una sub-sucesión convergente de $\{x_n\}_{n\geq 1}$ con límite $\bar{x}$, entonces lo mismo ocurre con la sub-sucesión correspondiente $\{z_{k(n)}\}_{n\geq 1}$ de $\{z_n\}_{n\geq 1}$ y

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{k(n)}) - f(z_{k(n)}) = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

Por lo tanto, podemos suponer que las sucesiones $\{x_n\}_{n\geq 1}$ y $\{z_n\}_{n\geq 1}$ no tienen sub-sucesiones convergentes. En particular, $\{x_n\}_{n\geq 1}$ no tiene sub-sucesión convergente a 0, por lo tanto existe $\varepsilon_0 > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| \geq \varepsilon_0$, por lo que se deduce que:

$$\sqrt{|x_n|} - \sqrt{|z_n|} = \frac{\left(\sqrt{|x_n|} - \sqrt{|z_n|}\right)\left(\sqrt{|x_n|} + \sqrt{|z_n|}\right)}{\sqrt{|x_n|} + \sqrt{|z_n|}} = \frac{|x_n| - |z_n|}{\sqrt{|x_n|} + \sqrt{|z_n|}} \leq \frac{|x_n - z_n|}{\sqrt{\varepsilon_0}}$$

es decir, $|f(x_n) - f(z_n)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, lo que muestra que f es uniformemente continua.

Mostramos ahora que f no es Lipschitz continua. Asumiendo el contrapuesto, supongamos que existe $k > 0$ tal que $|f(x) - f(z)| \leq k\,|x - z|$, para todo $x, z \in \mathbb{R}$ y tomamos $x = 0$ y $z = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces se deduce

$$\left|\sqrt{0} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right| \leq k\left|0 - \frac{1}{n}\right| \iff k \geq \sqrt{n}$$

lo que es contradictorio para $n > k^2$. $\square$

Ejercicio 3.26. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable con derivada acotada. Mostrar que f es Lipschitz continua.

(*Indicación*: Mueste que (22) se cumple con $k = \sup\{|f'(x)| : x \in \mathbb{R}\}$, utilizando el teorema del valor medio.)

4. Espacios completos y aplicaciones

En esta parte, introduciremos la noción de sucesión de Cauchy en un espacio normado y usaremos dicha noción para clasificar los espacios normados en dos categorías: los espacios completos (espacios de Banach), donde no hay diferencia entre las sucesiones de Cauchy y las sucesiones convergentes, y los espacios no completos, donde hay sucesiones de Cauchy no convergentes. Cerramos esta sección con el primer teorema importante de este curso, el teorema del punto fijo de Banach, y daremos una aplicación de dicho teorema en el estudio de ecuaciones diferenciales de primer orden.

4.1. Sucesiones de Cauchy

Empezamos esta sección con la siguiente definición.

Definición 4.1 (sucesión de Cauchy)**.** Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio normado. Una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ se dice *sucesión de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0 \; ||x_n - x_m|| < \varepsilon. \tag{23}$$

Como se puede apreciar, la definición de una sucesión de Cauchy hace uso explicito de la norma para medir las distancias entre los distintos elementos de la sucesión y expresar el hecho que para grandes valores de n, dichos elementos *deben acercarse entre ellos.* En particular, la Definición 4.1 no es una definición topológica, sino métrica: en efecto, por falta de poder fijar un punto de referencia —lo que en el caso de la Definición 2.10 (convergencia de sucesión) era el límite $\bar{x}$ de la sucesión— se necesita una cuantificación explicita para poder hablar de acercamiento, es decir, una noción de distancia[11].

Es bastante intuitivo entender que si una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es convergente (y por lo tanto, sus elementos se acercan a su límite $\bar{x}$), entonces esta sucesión debe ser de Cauchy (es decir, sus elementos se deben acercar entre ellos), luego que una sucesión de Cauchy debe ser acotada. Eso es el objetivo del siguiente ejercicio.

Ejercicio 4.2 (convergente $\Longrightarrow$ Cauchy)**.** Mostrar que:

(i). cada sucesión convergente es una sucesión de Cauchy ;

(ii). cada sucesión de Cauchy es acotada, luego dar un ejemplo de una sucesión acotada que no es de Cauchy.

Una pregunta natural sería saber si en un espacio normado existen sucesiones de Cauchy que no son convergentes. Recordamos que eso no puede ocurrir en $\mathbb{R}$, ya que es sabido que una sucesión de números reales es convergente si y sólo si es de Cauchy. (El Ejercício 4.4 más abajo propone una demostración basada en la existencia de supremo e ínfimo de cada conjunto acotado no vacío de la recta real.) Adelantamos aqui que existen espacios normados con sucesiones de Cauchy no convergentes (véase Proposición 4.8). Esto motiva la definición de un espacio completo que introducimos en la siguiente sección.

4.2. Espacios de Banach

La siguiente definición introduce una propiedad importante en análisis. Como veremos, en el marco de espacios normados, dicha propiedad se cumple siempre en dimensión finita.

Definición 4.3 (espacios de Banach y de Hilbert)**.** Un espacio normado $(X, ||\cdot||)$ se dice *completo* o *espacio de Banach,* si cada sucesión de Cauchy es convergente. El espacio de dice *espacio de Hilbert* si además, su norma proviene de producto escalar.

[11]El lector debe comparar (23) con Proposición 2.11(ii) (definición equivalente de convergencia) y convencerse que (23) no admite una definición topológica equivalente.

Intuitivamente, un espacio es completo si cada sucesión que tiene tendencia de converger (es decir, es de Cauchy) encuentra su límite en el espacio.

Ejercicio 4.4 ($(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es completo)**.** Mostrar que:

(i). Una sucesión de Cauchy converge si (y sólo si) posee una subsucesión convergente.

(ii). En $\mathbb{R}$ cada sucesión de Cauchy es convergente.

(*Indicación*: Usar la parte (i), el Ejercício 4.2(ii) y el teorema Bolzano-Weierstrass.)

Mostraremos a continuación que cada espacio de dimensión finita es completo. Trabajaremos inicialmente con la norma $||\cdot||_\infty$ y luego veremos que la conclusión es válida para cualquier norma de $\mathbb{R}^d$ (véase Observación 4.6). Al igual que la Proposición 2.29, en el siguiente resultado consideraremos sucesiones de vectores en $\mathbb{R}^d$ y para evitar posibles confusiones por la presencia de dobles índices, anotaremos por $(x(1), \ldots, x(d))$ las coordenadas de un vector $x \in \mathbb{R}^d$.

Proposición 4.5 ($(\mathbb{R}^d, ||\cdot||_\infty)$ es completo)**.** Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión $||\cdot||_\infty$-Cauchy[12] en $\mathbb{R}^d$. Entonces $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es convergente.

Demostración. Supongamos que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy, es decir, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n, m \geq n_0$ se tiene que

$$||x_n - x_m||_\infty := \max_{i\in\{1,\ldots,d\}} |x_n(i) - x_m(i)| < \varepsilon.$$

De lo anterior, se deduce que para cada $i \in \{1, \ldots, d\}$ la sucesión real de la i-coordenada $\{x_n(i)\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy, por lo tanto convergente a un número real (Ejercício 4.4(ii)). Sea

$$\bar{x}_i := \lim_{n\to\infty} x_n(i), \quad i \in \{1, \ldots, d\} \qquad \text{y} \qquad \bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d).$$

Se deduce que la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge por coordenadas al vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ y por lo tanto, también en norma, en virtud de la Proposición 2.29. □

Observación 4.6 (completitud vs equivalencia de normas)**.** Es fácil ver, usando la Proposición 2.23(i), que normas equivalentes tienen las misma sucesiones de Cauchy (y las mismas sucesiones convergentes). Por lo tanto, si un espacio normado es completo con respecto a una norma, también lo será con respecto a cualquier norma equivalente. Por lo tanto, se deduce de la Proposición 4.5 y del Corolario 2.24 (véase también Observación 2.25) que $\mathbb{R}^d$ es un espacio completo bajo cualquier norma. En particular, el espacio Euclideano $(\mathbb{R}^d, ||\cdot||_2)$ es un espacio de Hilbert.

[12]es decir, $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy con respecto a la norma $||\cdot||_\infty$

Ejercicio 4.7. (i). Mostrar que una función uniformemente continua envia sucesiones de Cauchy a sucesiones de Cauchy.

(ii). Mostrar mediante un ejemplo que el reciproco de lo anterior es falso, es decir, una función que mapea sucesiones de Cauchy a sucesiones de Cauchy no es necesariamente uniformemente continua.

(*Indicación*: Considerar la función del Ejercicio 3.22, que es una función continua entre espacios completos.)

4.3. Ejemplos de espacios de Banach

Empezamos por dar un ejemplo de espacio normado que no es completo.

Proposición 4.8 ($(c_{00}(\mathbb{N}), ||\cdot||_\infty)$ no es completo)**.** El espacio normado

$$c_{00}(\mathbb{N}) := \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \ \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N : x(k) = 0\right\}$$

con norma

$$||x||_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} \{ \, |x(k)| \}$$

no es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $x_1 = (1, 0, 0 \ldots)$ y para cada $n \geq 2$

$$x_n := (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots) \in c_{00}(\mathbb{N}).$$

Mostramos que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \geq 1/\varepsilon$. Entonces para todo $n, m \geq n_0$, y suponiendo sin perdida de generalidad que $n > m$ se tiene que

$$x_n - x_m = (0, \ldots, 0, \frac{1}{m+1}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$$

y por lo tanto

$$||x_n - x_m||_\infty \ := \ \frac{1}{m+1} \ < \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon.$$

Mostramos ahora que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ no puede converger a ningún elemento de $c_{00}(\mathbb{N})$. En efecto, sea $x = \{\bar{x}(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ un elemento arbitrario de $c_{00}(\mathbb{N})$. En particular, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bar{x}(k) = 0$ para todo $k \geq N$. Tomando $\varepsilon_0 = 1/N$ observamos que para todo $n \geq N$

$$||x_n - \bar{x}||_\infty \ \geq \ |x_n(N) - \bar{x}(N)| = |x_n(N)| = \frac{1}{N} = \varepsilon_0$$

es decir, la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ no converge a $\bar{x}$. Se deduce que el espacio $(c_{00}(\mathbb{N}), ||\cdot||_\infty)$ no es completo. $\square$

(★) A continuación, consideramos un espacio normado $(Y, ||.||_Y)$ y un conjunto $\Gamma \neq \emptyset$ (sin estructura particular). Llamaremos una función $f : \Gamma \to Y$ acotada, si $f(\Gamma)$ es un conjunto acotado de Y, es decir, $\sup\{||f(\gamma)||_Y : \gamma \in \Gamma\} < +\infty$. Anotaremos por $\boldsymbol{L}^\infty(\Gamma, Y)$ el espacio vectorial de las funciones acotadas definidas en Γ a valores en Y. Es fácil ver que la siguiente función

$$||f||_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma} ||f(\gamma)||_Y$$

es una norma en $\boldsymbol{L}^\infty(\Gamma, Y)$. (Invitamos al lector de comprobar los detalles.)

Proposición 4.9 (($\boldsymbol{L}^\infty(\Gamma, Y), ||\cdot||_\infty$) es completo)**.** Sea $\Gamma \neq \emptyset$ y $(Y, ||\cdot||_Y)$ un espacio de Banach. Entonces el espacio normado

$$(\boldsymbol{L}^\infty(\Gamma, Y), ||\cdot||_\infty) \quad \text{es completo (espacio de Banach).}$$

En particular, tomando $Y = \mathbb{R}$ deducimos que el espacio

$$\boldsymbol{L}^\infty(\Gamma) := \boldsymbol{L}^\infty(\Gamma, \mathbb{R}) = \{f : \Gamma \to \mathbb{R} \quad \text{acotada}\}$$

es un espacio de Banach, bajo la norma $||f||_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|$.

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $\boldsymbol{L}^\infty(\Gamma, Y)$. Entonces para cada $\gamma \in \Gamma$, la sucesión $\{f_n(\gamma)\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $(Y, ||\cdot||_Y)$ por lo tanto, converge a un elemento del espacio normado Y. Consideramos la función

$$\begin{cases} \phi : \Gamma \to Y \\ \phi(\gamma) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\gamma). \end{cases}$$

Mostramos que la función ϕ es acotada. En efecto, la sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es acotada (*cf.* Ejercício 4.2(ii)), es decir $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||f_n|| < +\infty$. Entonces para todo $\gamma \in \Gamma$ se tiene que

$$||\phi(\gamma)||_Y \leq ||\phi(\gamma) - f_n(\gamma)||_Y + ||f_n(\gamma)||_Y \leq ||\phi(\gamma) - f_n(\gamma)||_Y + M.$$

Tomando el límite cuando $n \to +\infty$ obtenemos $||\phi(\gamma)||_Y \leq M$ y (como γ es arbitrario y M no depende de γ) $||\phi||_\infty \leq M$. Se concluye que $\phi \in \boldsymbol{L}^\infty(\Gamma, Y)$.

Mostramos por último que $||f_n - \phi||_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Sea $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$ se tiene que $||f_n - f_m||_\infty < \varepsilon/2$. Entonces para cualquier $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ y $\gamma \in \Gamma$ se tiene que

$$||f_n(\gamma) - \phi(\gamma)||_Y \leq ||f_n(\gamma) - f_m(\gamma)||_Y + ||f_m(\gamma) - \phi(\gamma)||_Y < \frac{\varepsilon}{2} + ||f_m(\gamma) - \phi(\gamma)||_Y.$$

Dado que $\phi(\gamma) = \lim\limits_{m\to\infty} f_m(\gamma)$, tomando m suficientemente grande, podemos asegurar que

$$||f_m(\gamma) - \phi(\gamma)||_Y < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y por lo tanto} \qquad ||f_n(\gamma) - \phi(\gamma)||_Y < \varepsilon.$$

Observando que la desigualdad anterior es cierta para todo $n \geq n_0$ y $\gamma \in \Gamma$, concluimos que

$$||f_n - \phi||_\infty = \sup_{\gamma \in \Gamma} ||f_n(\gamma) - \phi(\gamma)||_Y \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Esto muestra que la sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es convergente a la función $\phi \in \boldsymbol{L}^\infty(\Gamma, Y)$, es decir, el espacio $\boldsymbol{L}^\infty(\Gamma, Y)$ es completo. □

Ejercicio 4.10. (i). (subespacios cerrados.**)** Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio de Banach y Z un subespacio vectorial cerrado de X. Considerando Z como espacio normado (con norma la restricción de la norma $||\cdot||$ de X en Z, mostrar que Z es un espacio de Banach.

(*Indicación*: Cada sucesión de Cauchy en Z es convergente en X.)

(ii). ($(\mathcal{C}([a,b]), ||\cdot||_\infty)$ es completo.**)** Concluir que el espacio $\mathcal{C}([a,b])$ de las funciones continuas definidas en $[a,b]$ (donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$) a valores reales es un espacio de Banach con la norma $||\cdot||_\infty$ (véase Ejercicio 2.26).

(*Indicación*: Utilizar Proposición 4.9 con $\Gamma = [a,b]$ y mostrar que el conjunto $\mathcal{C}([a,b])$ es cerrado[13] en el espacio de Banach $(\boldsymbol{L}^\infty([a,b]), ||\cdot||_\infty)$.)

4.4. Teorema del punto fijo de Banach

En esta sección presentaremos el primer teorema importante de este curso, conocido como *el teorema del punto fijo de Banach*. Este teorema está basado en la noción de completitud del espacio, véase Sección 4. Para poder enunciar el teorema, necesitaremos primero la noción de contracción. A continuación, fijamos un espacio normado $(X, ||\cdot||_X)$ que anotaremos por simplicidad X. También anotaremos su norma por $||\cdot||$ (omitiendo el indice), dado que no habrá confusión con normas de otros espacios.

Definición 4.11 (contracción)**.** Una función $f : X \to X$ se dice contracción, si existe $0 < \rho < 1$ tal que

$$||f(x) - f(z)|| \leq \rho \, ||x - z||. \tag{24}$$

Observamos entonces que f es una contracción si mapea el espacio en si mismo y al mismo tiempo, es Lipschitz continua con constante menos que 1 (por lo tanto contrae las distancias). El hecho de contraer distancias se refleja en la siguiente resultado, que será primordial para nuestro resultado principal.

Lema 4.12. *Sea $f : X \to X$ una contracción y sea $x_0 \in X$. Entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ definida por*

$$x_{n+1} := f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

es una sucesión de Cauchy.

[13] es decir, límite uniforme de una sucesión de funciones continuas es una función continua.

Demostración. Observamos primero que si $x_1 := f(x_0) = x_0$, entonces se tiene que $x_2 = f(x_1) = f(x_0) = x_0$ y por inducción, $x_n = x_0$ para todo $n \geq 1$, es decir, la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es constante (y *a fortiori*, de Cauchy). Podemos entonces suponer que $||x_1 - x_0|| > 0$.
Anotemos por $\rho \in (0,1)$ la constante Lipschitz de la contracción f y mostramos por inducción que

$$||x_{n+1} - x_n|| \leq \rho^n \, ||x_1 - x_0||, \qquad \forall n \geq 1. \tag{26}$$

En efecto, aplicando (24) para $x = x_1$ y $z = x_0$ se deduce inmediatamente de la definición de la sucesión (25) que (26) se cumple para $n = 1$. Supongamos ahora que (26) se cumple para $n = k \geq 1$, es decir, $||x_{k+1} - x_k|| \leq \rho^k ||x_1 - x_0||$, y mostramos que también se cumple para $n = k+1$. Usando nuevamente la definición de la sucesión (25) y la definición de la contracción (24) deducimos

$$||x_{k+2} - x_{k+1}|| = ||f(x_{k+1}) - f(x_k)|| \leq \rho ||x_{k+1} - x_k||,$$

y combinando con la hipotesis de inducción obtenemos que (26)) se cumple para $n = k+1$, lo que completa la demostración de la inducción.

Mostramos ahora que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy. Para eso, consideramos $\varepsilon > 0$ (arbitrario) y ponemos

$$\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{||x_1 - x_0||}.$$

Observamos ahora que la sucesión $\sigma_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \rho^k$, $n \geq 1$, es una sucesión convergente en $\mathbb{R}$ con límite

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}.$$

En particular, $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy, y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > n > n_0$ se tiene que

$$|\sigma_{m-1} - \sigma_{n-1}| \left(= \sum_{k=0}^{m-1} \rho^k - \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k = \sum_{k=n}^{m-1} \rho^k \right) < \varepsilon_1. \tag{27}$$

Por la desigualdad triangular de la norma y luego aplicando sucesivamente (26) obtenemos:

$$||x_m - x_{m-1}|| + \ldots + ||x_{n+1} - x_n|| \leq \left(\rho^{m-1} + \ldots + \rho^n\right) ||x_1 - x_0||. \tag{28}$$

Combinando las desigualdades anteriores (27) y (28) obtenemos $||x_m - x_n|| \leq \varepsilon$, lo que muestra lo pedido. $\square$

Teorema 4.13 (Punto fijo de Banach)**.** *Sea $(X, ||.||)$ un espacio completo y $f : X \to X$ una contracción. Entonces f tiene un único punto fijo, es decir:*

$$\exists! \bar{x} \in X : \quad f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Demostración. (*existencia*) Sea $x_0 \in X$ un elemento arbitrario del espacio, y consideramos la sucesión $x_{n+1} := f(x_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ definida por (25). Por el Lema 4.12, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, por lo tanto convergente a un elemento $\bar{x} \in X$ (*cf.* Definición 4.3). Tomando el límite en (25) cuando $n \to \infty$ deducimos por la continuidad de f que

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\bar{x}),$$

es decir, que $\bar{x}$ es un punto fijo de X.

(*unicidad*) Supongamos que $\bar{x}, \bar{y} \in X$ son dos puntos fijos de f, es decir, $f(\bar{x}) = \bar{x}$ y $f(\bar{y}) = \bar{y}$. Entonces, por la definición de la contracción, existe $\rho < 1$ tal que:

$$||\bar{x} - \bar{y}|| = ||f(\bar{x}) - f(\bar{y})|| \leq \rho\, ||\bar{x} - \bar{y}||.$$

Lo anterior es cierto si y sólo si $||\bar{x} - \bar{y}|| = 0$, es decir, $\bar{x} = \bar{y}$. □

4.5. Teorema de Picard-Lindelöf

Mencionamos a continuación una aplicación potente del Teorema 4.13 en la existencia y unicidad de una ecuación diferencial ordinaria (EDO) del primer orden.

Corolario 4.14 (Teorema de Picard-Lindelöf en dimensión uno)**.** *Sea* $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua tal que*[14]*:*

$$\exists k > 0 : \quad |\Phi(t, x) - \Phi(t, y)| \leq k\, |x - y|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

Fijamos $x_0 \in \mathbb{R}$ *y* $T \in (0, k^{-1})$*. Entonces la ecuación diferencial*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \Phi(x(t)), & t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{30}$$

tiene una única solución en $[0, T]$*.*

Demostración. Anotemos por $X := \mathcal{C}([0, T]), || \cdot ||_\infty)$ el espacio de vectorial de las funciones continuas de $[0, T]$ a valores reales, es decir,

$$\mathcal{C}([0, T]) := \{x : [0, T] \to \mathbb{R} \quad \text{continua}\},$$

equipado con la norma

$$||x||_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

En virtud del Ejercicio 4.10(ii) X es un espacio de Banach. Definimos una función

$$\begin{cases} f : X \to X \\ f(x) := \hat{x}, & \forall x \in X \end{cases} \tag{31}$$

[14] la formula (29) dice que Φ es uniformemente k-Lipschitz con respecto a la segunda variable.

donde

$$\hat{x}(t) := x_0 + \int_0^t \Phi(\tau, x(\tau))d\tau, \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{32}$$

Notemos que $t \longmapsto \hat{x}(t)$ es una función continua (y por lo tanto f está bien definida). A continuación, mostramos lo siguiente:

Una función $\bar{x} \in X$ es solución[15] de (30) si y sólo si es un punto fijo de f.

En efecto, supondiendo (30) e integrando de 0 a t ambos lados de la ecuación $\dot{x}(\tau) = \Phi(x(\tau))$ obtenemos:

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \dot{x}(\tau)d\tau = \int_0^t \Phi(\tau, x(\tau))d\tau.$$

Dado que $x(0) = x_0$ deducimos de (32) que $x = \hat{x} = f(x)$. Para el reciproco, supongamos $x = f(x) = \hat{x}$, es decir, para todo $t \in [0, T]$ se tiene que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \Phi(\tau, x(\tau))d\tau.$$

De la ecuación anterior deducimos directamente que $x(0) = x_0$, luego que x es derivable con derivada

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t \Phi(\tau, x(\tau))d\tau\right) = \Phi(t, x(t)),$$

es decir, la función x es solución de la EDO (30).

Por lo anterior, y por el Teorema 4.13 (punto fijo de Banach) la afirmación del corolario quedará demostrada una vez que establecemos que la función f definida en (31)–(32) es una contracción. Para eso, sea $x, y \in X$ y anotemos $\hat{x} = f(x)$, $\hat{y} = f(y)$. Usando (32) y (29) deducimos que:

$$|\hat{x}(t) - \hat{y}(t)| \leq \int_0^t |\Phi(\tau, x(\tau)) - \Phi(\tau, y(\tau))|\, d\tau \leq k \int_0^t |x(\tau) - y(\tau))|\, d\tau \leq kT\, ||x - y||_\infty$$

para todo $0 \leq t \leq T$. Dado que la cota final no depende de t, obtenemos

$$||f(x) - f(y)||_\infty = \sup_{t\in[0,T]} |\hat{x}(t) - \hat{y}(t)| \leq (kT)\, ||x - y||_\infty$$

[15]en particular, la función x (además de ser continua) tiene que ser diferenciable en cada t

lo cual muestra, gracias a la hipotesis que $T \in (0, k^{-1})$, que la función f es Lipschitz continua con constante $\rho = kT < 1$. La demostración es completa. $\square$

(★) Mencionamos que el resultado del Corolario 4.14 se puede generalizar como sigue: (*Teorema de Picard-Lindelöf en espacios de Banach*) Sea $(Y, ||\cdot||_Y)$ un espacio de Banach y $\Phi : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ una función continua tal que:

$$\exists k > 0 : \; |\Phi(t, x) - \Phi(t, y)| \leq k \, ||x - y||_{\mathbb{E}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x, y \in Y.$$

Entonces la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \Phi(x(t)), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución[16] $x : [0, T] \to Y$. donde $x_0 \in \mathbb{R}$ y $T \in (0, k^{-1})$.

El siguiente ejercicio propone una demostración en el caso $Y = (\mathbb{R}^d, ||\cdot||_2)$.

Ejercicio 4.15. (i). Muestre que el espacio $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^d)$ de las funciones continuas de $[0, T]$ $(T > 0)$ a valores en $\mathbb{R}^d$ es un espacio de Banach con la norma

$$||x||_\infty := \sup_{t \in [a,b]} \|x(t)\|_2 \, .$$

(*Indicación*: Utilizar Proposición 4.9 con $\Gamma = [0, T]$ y $Y = (\mathbb{R}^d, ||\cdot||_2)$ y mostrar que el espacio $\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^d)$ es un subespacio cerrado de $\boldsymbol{L}^\infty([0, T], \mathbb{R}^d)$ con la norma-infinito.)

(ii). Mostrar el teorema de Picard-Lindelöf en dimensión finita, adaptando la demostración del Corolario 4.14.
(*Indicación*: Definir una contracción f en el espacio de Banach $X = \big(\mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^d), ||\cdot||_\infty\big)$, trabajando en coordenadas.)

[16] La noción de diferenciabilidad para funciones entre espacios normados (que se verá más adelante) da un sentido preciso a la derivada $\dot{x}(t)$ de la función $x(t)$.

5. Anexo: espacios métricos y topológicos (★)

La gran mayoría de los resultados obtenidos en esta parte no hacen uso de la estructura vectorial de los espacios normados, sino de la distancia que se define a partir de una norma[17] y luego de la topología que se define mediante la distancia. Esta sección anexa aporta más aclaraciones y detalles para los alumnos interesados.

Empezamos con la definición de un espacio métrico.

Definición 5.1 (espacio métrico)**.** Sea $X \neq \emptyset$ (conjunto sin estructura particular). Una función $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ se dice *distancia* (o *métrica*) en X si

(D1) (simetría) $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in X$;

(D2) (desigualdad triangular) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, para todo $x, y, z \in X$;

(D3) (definida positiva) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ para todo $x, y \in X$.

Si d es una distancia en X, decimos que (X, d) es un *espacio métrico.*

Es fácil deducir, a partir de la Definición 1.11 que si X es un espacio vectorial y $|| \cdot || : X \to \mathbb{R}_+$ es una norma en X, entonces la función

$$d(x, y) = ||x - y||, \qquad \forall x, y \in X, \tag{33}$$

cumple las propiedades (D1)–(D3) y por lo tanto es una distancia. En otras palabras, si $(X, || \cdot ||)$ es un espacio normado, entonces (X, d) es un espacio métrico, con d definida por (33).

Luego, se puede apreciar que la definición de las bolas (y por lo tanto, de los conjuntos abiertos) en la Sección 2.1, se pueden re-escribir en terminos de distancia, sin necesidad de que el espacio donde trabajamos sea un espacio vectorial. En efecto, en un espacio métrico (X, d) definimos las bolas abiertas como sigue:

$$B(x, \delta) := \{z \in \mathbb{E} : \ d(z, x) < \delta\}, \qquad \forall x \in X, \ \forall \delta > 0.$$

Luego, una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ se dice sucesión de Cauchy, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \, \forall n, m \geq n_0 : \ d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

La sucesión es convergente si existe $\bar{x} \in X$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, \bar{x}) = 0 \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \, \forall n \geq n_0 : \ d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon.$$

(Invitamos al lector de comparar las definiciones anteriores con las Definiciones 4.1 y 2.10 respectivamente, dadas en un espacio normado, y adaptar la técnica del Ejericio 2.12 para mostrar que el límite de una sucesión en un espacio métrico, si existe, es único.)

[17] Las Proposiones 2.3 y 2.22 son la única excepción.

Las definiciones de continuidad, continuidad uniforme y continuidad Lipschitz se extienden de forma natural a funciones definidas entre espacios métricos (no necesariamente vectoriales).

Revisitando ahora la Sección 4, vemos que la noción de competitud (*cf.* Definición 4.3) también se inscribe de forma natural en el marco de espacios métricos:

Definición 5.2 (espacio métrico completo)**.** Un espacio métrico (X, d) se dice *completo* si cada sucesión de Cauchy es convergente.

En particular, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.3 (Punto fijo de Banach, versión métrica)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una contracción. Entonces f tiene un único punto fijo, es decir:*

$$\exists!\, \bar{x} \in X : \quad f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

(Invitamos al lector interesado de retomar las demostraciones del Lema 4.12 y del Teorema 4.13 utilizando la distancia definida por (33) en lugar de la norma y convencerse que la estructura vectorial es irrelevante y que los resultados siguen válidos en este marco más general.)

Los conjuntos abiertos (topología) de un espacio métrico se definen de la misma manera que se hizo en espacios normados, a partir de las bolas. En particular, la Proposición 2.5 queda cierta en este nuevo marco. Esto motiva una nueva generalización, presentada en la siguiente definición.

Definición 5.4 (espacio topológico)**.** Sea $X \neq \emptyset$ (conjunto sin estructura particular). Llamamos *topología* en X y anotamos por $\mathcal{T}$ una familia de subconjuntos de X que cumple las siguientes tres propiedades:

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T} \quad \text{y} \quad X \in \mathcal{T}$;

(T2) $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T} \implies \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}$;

(T3) $\{\mathcal{V}_1, \ldots V_k\} \subset \mathcal{T} \implies \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{V}_i \in \mathcal{T}$.

Si $\mathcal{T}$ es una topología en X, decimos que $(X, \mathcal{T})$ es un *espacio topológico*, luego los elementos de la familia $\mathcal{T}$ los llamamos conjuntos abiertos en X.

Los espacios topológicos constituyen el marco más abstracto (y más natural) para hablar de convergencia de sucesiones[18] y de continuidad de funciones, véase Definición 2.10 y Definición 3.1 respectivamente. Por otra parte, la noción de sucesión de Cauchy, de completitud y de acotación no son nociones topológicas y necesitan una distancia.

Cada espacio métrico también es un espacio topológico (en virtud de (ii)–(iii) de la Proposición 2.5 que, como hemos dicho, sigue válida en espacios métricos). Por otra parte, hay

[18] o más general de filtros

topologías que no provienen de distancias (es decir, que no son métrizables). Por ejemplo, $X = \mathbb{R}$ tiene única topología como espacio vectorial (la que proviene por su norma, es decir, el valor absoluto), pero considerando $X = \mathbb{R}$ como conjunto, podemos definir varias topologías, como por ejemplo:

– la topología trivial
$$\mathcal{T}_{\text{mín}} := \{\emptyset, \mathbb{R}\} \quad \text{(topología mínima)}$$
con únicos abiertos el conjunto vacío y todo el espacio. Observad que cualquier sucesión $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R}$ es $\mathcal{T}_{\text{mín}}$-convergente a cualquier punto. (En particular, no hay unicidad del límite y esta topología no proviene de ninguna distancia.)

– la topología discreta
$$\mathcal{T}_{\text{máx}} := 2^{\mathbb{R}} \quad \text{(topología máxima)}$$
donde cada conjunto es abierto. Esta topología es metrizable, porque se puede obtener a partir de las bolas de la siguiente distancia
$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$
(El lector puede fácilmente comprobar que la función anterior satisface las propiedades (D1)–(D3) de la Definición 5.1, luego que $B(x,\delta) = \{x\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\delta \in (0,1)$.)

– la topología co-numerable $\mathcal{T}_{\text{conum}}$ que tiene como (únicos) abiertos el espacio $\mathbb{R}$ y cada conjunto con complemento numerable, es decir:
$$A \in \mathcal{T}_{\text{conum}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} A = \mathbb{R} & \text{o} \\ \mathbb{R} \setminus A \text{ es un conjunto numerable.} \end{cases}$$

Ejercicio 5.5 (★). Muestre que en los espacios topológicos $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{conum}})$ las únicas sucesiones convergentes son las sucesiones eventualmente constantes.

Mencionamos por último que hay criterios que permiten decidir si una topología es metrizable. Acerca de distancias definidas en un espacio vectorial, existe la siguiente caracterización: Si (X,d) es un espacio métrico y X es un espacio vectorial, entonces la distancia d se induce de una norma (en el sentido de la ecuación (33)) si y sólo si cumple las siguientes propiedades:

(invariancia por traslados) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$, para todo $x, y, z \in X$;

(homotecía) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$, para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Problemas propuestos

En esta parte incluimos una lista de problemas, clasificados por temas y de dificultad variada, que están basados en la teoría desarrolada en esta primera parte del curso.

6.1. Ejercicios sobre normas

N1. Sea $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ una función lineal biyectiva y $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^d$. Demuestre que la función

$$\mathrm{N}(x) := \|T(x)\|, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

define otra norma en $\mathbb{R}^d$.

N2. Sea $\rho : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una función tal que[19]:

- Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $x \in \mathbb{R}^d$, $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$.
- Para todo par $x, y \in \mathbb{R}^d$, $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

Muestre que para todo par $x, y \in \mathbb{R}^d$ se tiene que:

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leq \rho(x - y).$$

N3. Sea $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ el espacio de matrices $n \times n$. Definimos:

$$\|A\| = \max_{j=1,\dots,n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \qquad \text{para cada } A \in \mathcal{M}.$$

Pruebe que $\|\cdot\|$ es una norma en $\mathcal{M}$.

N4. Sean $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ dos normas en un espacio vectorial X. Se define la aplicación:

$$\mathrm{N}(x) := \sqrt{\|x\|_a^2 + \|x\|_b^2}, \quad \text{para todo } \ x \in X.$$

Demostrar que N es una norma en X.

Indicación: Muestre primero (usando la desigualdad Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^2$) que para todo $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ se tiene $pr + qs \leq \sqrt{(p^2 + q^2)(r^2 + s^2)}$.

[19]Tal función se llama *seminorma*. Observe que si ρ cumple que $\rho(x) \neq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$, entonces es una norma.

N5. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado cuya norma esta inducida por un producto escalar. Pruebe que:

(a) $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\,(||x||^2 + ||y||^2)$, para todo $x, y \in E$;

(b) $||x+y|| \cdot ||x-y|| \leq ||x||^2 + ||y||^2$, para todo $x, y \in E$.

N6. Sea $w : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua, no negativa. Se define para $f \in \mathcal{C}([0,1])$

$$||f||_w = \sup_{x\in[0,1]} w(x) \cdot |f(x)|.$$

Muestre que:

(a) Si $w(x) > 0$, $\forall x \in (0,1)$, entonces $||\cdot||_w$ es una norma en $\mathcal{C}([0,1])$.

(b) Si $w(x) > 0$, $\forall x \in [0,1]$, entonces $||\cdot||_w$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_\infty$.

(c) Si $w(x) = x$, $\forall x \in [0,1]$, entonces $||\cdot||_w$ **no** es equivalente a la norma $\|\cdot\|_\infty$.

N7. Sea $(E, ||\cdot||_E)$ y $(F, ||\cdot||_F$ dos espacios normados, $D \subseteq E$ un conjunto no vacío y $f : E \to F$. Definimos:

$$||f||_{\text{Lip}} := \sup_{x\neq y} \frac{||f(x)-f(y)||_F}{||x-y||_E} \tag{34}$$

- Muestre que el supremo anterior esta bien definido si y sólo si f es Lipschitz.
- Muestre que (34) **no** define una norma (sino una seminorma).

Consideramos el espacio vectorial $\text{Lip}(D,F) := \{f : D \to F \mid \ f \text{ es Lipschitz}\}$.

- Fijamos $\bar{x} \in D$. Muestre que $\|\cdot\|$ definida por

$$||f|| := ||f(\bar{x})||_F + ||f||_{\text{Lip}}$$

es una norma en el espacio $\text{Lip}(D,F)$.

N8. Dado $k \in \mathbb{N}$ considere el espacio vectorial $\mathcal{C}^k([a,b])$ de las funciones de clase $\mathcal{C}^k$ definidas en el intervalo $[a,b]$ a valores reales[20]. Usamos la convención $f^0 := f$, luego anotamos por $\mathcal{C}^0([a,b]) := \mathcal{C}([a,b])$ el espacio de las funciones continuas en $[a,b]$ y

$$||f||_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|, \quad \text{para cada } f \in \mathcal{C}([a,b]).$$

Muestre que la función $\|\cdot\|_k$ definida por:

$$\|f\|_k = \sum_{i=0}^{k} ||f^{(i)}||_\infty$$

es una norma en $\mathcal{C}^k([a,b])$.

[20]Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice de clase $\mathcal{C}^k$ si existe $r > 0$ tal que f es la restricción en $[a,b]$ de una función de clase $\mathcal{C}^k$ definida en el intervalo abierto $(a-r, b+r)$.

N9. Sea E un espacio vectorial y $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de normas en E.

(a) Demuestre que: $N_k(x) := \sum_{n=1}^{k} \|x\|_n$ es una norma en E para todo $k \in \mathbb{N}$.

(b) Sea

$$N_\infty(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_n \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Z} =: \{x \in \mathrm{E} : N_\infty(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Muestre que Z es un subespacio vectorial de E y que N_∞ es una norma en Z.

N10. Para cada $p \geq 1$, se define $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p}, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

Se cumple que $\|\cdot\|_p$ es una norma en $\mathbb{R}^d$ (no lo demuestre).

(a) Muestre que para cada $p \geq 1$ se tiene:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty.$$

(b) Concluya que $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$.

N11. Sean $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ dos normas en un espacio vectorial X. Pruebe que

$$\forall x \in X : \ \|x\|_a < 1 \implies \|x\|_b < 1 \qquad \textit{si y sólo si} \qquad \forall x \in X : \ ||x||_b \leq ||x||_a .$$

6.2. Ejercicios sobre conceptos topológicos

T1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Se define la distancia de un punto $x \in E$ a un conjunto $A \subseteq E$ como sigue:

$$d_A(x) = \inf_{y\in A} \|x - y\| .$$

Demuestre que

$$\mathrm{cl}(A) = \{x \in E : d_A(x) = 0\} .$$

T2. Sea E un espacio normado cualquiera. Muestre que:

(a) Si F es un subespacio vectorial abierto de E, entonces $E = F$.

(b) Si F es un subespacio vectorial de E con interior no vacío, entonces $E = F$.
Indicación: Demuestre que $\mathrm{Int}(F)$ es un subespacio vectorial de E.

T3. **(a)** Para los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, justifique si son abiertos, cerrados o ninguna de las dos alternativas, luego determine su interior, clausura y frontera.

i) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2, 1 < y < 2\}$

ii) $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \geq x \geq 4, 1 \geq y \geq 2\}$

iii) $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5 < x < 7, 1 \leq y \leq 2\}$

iv) $A_4 = \{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 : n, m \in \mathbb{N}\}$

v) $A_5 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), y > \tan(x)\right\}$

(b) Haga lo mismo para los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$

i) $B_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > x^2 + y^2\}$

ii) $B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq x^2 + y^2\}$

iii) $B_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 > \frac{x^2+y^2}{z}\}$

iv) $B_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1\}$

v) $B_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \leq 1, \sin(x^2 + y^2 + 6) < x^3 + 4\}$

T4. Considere $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, una sucesión que satisface $t_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Muestre que:

$$A \text{ es acotado} \iff \forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A, \text{ se cumple que } \lim_{n\longrightarrow\infty} t_n x_n = 0$$

T5. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $Y \subseteq X$ un subespacio vectorial de dimensión finita. Pruebe que:

(a) Y es cerrado.

(b) Para todo subespacio cerrado Z de X se tiene que $Y + Z$ es cerrado.

T6. Sea E un espacio normado y $f : E \to \mathbb{R}$ una función tal que para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ y $x_0 \in E$ tal que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x_0).$$

Muestre que el conjunto $\{(x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$ es cerrado[21].

[21] Este conjunto se llama *epigrafo* de f

6.3. Ejercicios sobre convergencia de sucesiones

S1. Sea E un espacio normado

(a) Sean $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{b_k\}_{k\in N}$ dos sucesiones en E tales que:

$$a_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} a \quad , \quad (a_k+b_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} c$$

Muestre que entonces la sucesión $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente.

(b) Demuestre que si A es compacto y B es cerrado, entonces $A+B$ es cerrado.
Indicación: Use la parte anterior.

(c) La compacidad es necesaria en la parte anterior para eso considere

$$A = \mathbb{N}\backslash\{0\}, \quad B = \left\{-n+\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}\right\}$$

Demuestre que ambos son cerrados pero $A+B$ no lo es.

S2. Considere en $\mathbb{R}^2$ la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$x_n = \left(\frac{x_n(\cos(v_n)-1)}{u_n^2+v_n^2}, \frac{2u_n^\alpha+v_n^4}{|u_n|+3|v_n|}\right), \qquad n\in\mathbb{N}$$

donde $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones reales convergentes a cero, y $\alpha\in\mathbb{R}$ una constante arbitraria.

(a) Muestre que la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}^2$ converge si $\alpha=2$.

(b) ¿Que pasa si $\alpha=1$?
Indicación: Analice casos.

S3. Sea $f_1 : [a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable. Definimos una sucesión de funciones $\{f_k\}_{k\geq 1}$ como sigue:

$$f_{k+1}(x) = \int_a^x f_k(t)dt\,, \qquad k\geq 1$$

Pruebe que la sucesión de funciones $\{w_n\}_n$ definida por

$$w_n(x) := \sum_{k=1}^n f_k(x)\,, \qquad n\geq 1$$

es convergente en el espacio normado $(\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

S4. Decida si cada una de las siguientes sucesiones son convergentes, en caso de serlo indique su límite. (A continuación se define el k-término de la sucesión, donde $k \geq 1$.

(a) $x_k = (e^{-k}\cos(k^2), e^{-k}\sin(k^2))$

(b) $y_k = \left(k^{-2}, (-1)^{k+1}, \sqrt{k^2+k+1} - k\right)$

(c) $z_k = \|y_k\|_2$

(d) $w_k = \langle y_k, (1,0,1)\rangle \; x_k$

S5. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado cuya norma proviene de un producto escalar b. Dado $F \subseteq E$ un subespacio vectorial de E, se define el conjunto ortogonal a F, denotado por $F^\perp$ como:

$$F^\perp = \{x \in E : b(x,y) = 0, \; \forall y \in F\}.$$

Demuestre que $F^\perp$ es un subespacio vectorial cerrado de E.

S6. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y sea $(x_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de E. Definimos para cada $n \geq 1$

$$S_n := \{x_k\}_{k \geq n}.$$

(a) Demuestre que

$$A := \bigcap_{n\geq 1} \overline{S_n},$$

es el conjunto de puntos de acumulación de x_n.

(b) Demuestre que el conjunto de puntos de acumulación de la sucesión es cerrado.

6.4. Ejercicios sobre continuidad de funciones

F1. Sea E un espacio normado. Dado $f : E \to \mathbb{R}$. Definimos los conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathrm{Gr}(f) &= \{(x,y) \in E \times \mathbb{R} : y = f(x)\} && \text{(grafo de } f) \\ \mathrm{epi}(f) &= \{(x,y) \in E \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\} && \text{(epigrafo de } f) \\ \mathrm{S}_c(f) &= \{x \in E : f(x) \leq c\} && (c\text{-subnivel de } f),\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(a) Si f es continua, muestre que los conjuntos $\mathrm{Gr}(f), \mathrm{epi}(f)$ y $\mathrm{S}_c(f)$ son cerrados.

(b) Construya una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (que no será continua) tal que $\mathrm{Gr}(f), \mathrm{epi}(f)$ y $\mathrm{S}_c(f)$ (para algún valor c) no sean cerrados.

F2. Sea E un espacio normado, $A \subseteq E$ un conjunto cerrado no vacío y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que el conjunto de los ceros de la función

$$\mathrm{Z}(f) := \{x \in A : f(x) = 0\}$$

es un subconjunto cerrado en E.

F3. Sean X y Y dos espacios normados y $f : X \to Y$ una función continua. Denotamospor $f(A) = \{f(x) \in Y : x \in A\}$ la imagen de un conjunto $A \subseteq X$ por f. Demuestre que para todo conjunto $A \subseteq X$ se tiene que:

$$f(\mathrm{cl}(A)) \subseteq \mathrm{cl}(f(A))$$

Con un ejemplo, muestre que en general no se tiene la igualdad.

F4. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2-xy+y^2}\,, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Si $\alpha > 1$, demuestre que f es continua en todo su dominio.
Indicación: Recuerde que $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$.

(b) Si $\alpha \leq 1$, demuestre que f no es continua en $(0,0)$.

F5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^\alpha}\,, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Demuestre que para $\alpha < 3$, f es continua en $\mathbb{R}^2$.

(b) Muestre que si $\alpha \geq 3$, existe una sucesión $(x_n, y_n) \to (0,0)$ tal que $f(x_n, y_n) \not\to 0$. ¿Qué puede decir de la continuidad de f en este caso?

(c) Muestre que el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^3y^3 > x^2 + y^2\}.$$

es abierto en $\mathbb{R}^2$.

F6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\exp(x^2+y^2)-1}{\ln(1+x^2+y^2)}\,, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Estudie la continuidad de f.

(b) Pruebe que el conjunto

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; \|(x,y)\|_2 \leq \frac{5}{3}, \; \exp(x^2+y^2) - 1 \geq \ln(1 + x^2 + y^2)^{\frac{5}{3}}\right\}$$

es compacto.

F7. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x+y \leq 0 \\ \sqrt{x+y}+xy & \text{si } x+y > 0. \end{cases}$$

Determine todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ donde f es continua. Justifique su respuesta.

F8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\exp(-\frac{1}{|x|})\exp(|y|)}{|x|+|y|}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0\,, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Demuestre que $f(x,y)$ es una función continua,

(b) ¿Es $\lim\limits_{||(x,y)|| \longrightarrow \infty} f(x,y) = +\infty$?

F9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{xy}, & \text{si } xy \neq 0 \\ 0\,, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

Determine el conjunto de discontinuidad de f y muestre que es cerrado.

F10. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^\alpha + y^4}{|x|+3|y|}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \beta\,, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Si $\alpha = 1$, muestre que f no puede ser continua para ningún valor de β.

(b) Si $\alpha = 2$, encuentre un valor de β para el cual la función f sea continua.

F11. Muestre que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ define por

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

alcanza su valor mínimo, pero no es una función coerciva.

F12. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = 0\,.$$

(a) Muestre que si f es positiva (es decir $f(x) > 0,\ \forall x \in E$), entonces f alcanza su máximo, pero no su mínimo.

(b) Muestre que f alcanza su máximo y su mínimo si y sólo si existe $x \in E$ tal que $f(x) = 0$.

6.5. Ejercicios sobre espacios de Banach y punto fijo

B1. Sea $(E, ||\cdot||_E), (F, ||\cdot||_F)$ dos espacios normados:

(a) Pruebe que la función definida por:

$$||(x,y)||_{E\times F} := ||x||_E + ||y||_F$$

es una norma en el espacio producto $E \times F$.

(b) Pruebe que E y F son completos (Banach) si y sólo si $E \times F$ es Banach.

B2. Sea $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ un espacio de Hilbert (*i.e.* $\mathcal{H}$ es completo y su norma proviene de un producto escalar b). Sea $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ una aplicación que verifica las siguientes propiedades para todo $x, y \in \mathcal{H}$, donde $\alpha, \beta > 0$ son constantes dadas:

- $b(F(x) - F(y), x - y) \geq \alpha \|x - y\|^2$.
- $\|F(x) - F(y)\| \leq \beta \|x - y\|$.

Se trata de mostrar que F es una función biyectiva. Para ello, proceda como sigue:

(a) Pruebe que F es inyectiva.

(b) Para probar la sobreyectividad de F, siga los siguientes pasos: Para $y \in \mathcal{H}, \lambda > 0$ fijos definimos la aplicación:

$$\phi_{y,\lambda} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad \phi_{y,\lambda}(x) = x - \lambda(F(x) - y)$$

i) Demuestre que $\phi_{y,\lambda}$ es una función Lipschitz.

ii) Muestre que para λ adecuado, $\phi_{y,\lambda}$ es contractante.

iii) Concluya el resultado deseado haciendo uso del Teorema del Punto Fijo.

B3. [**Control 2020**] Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $f : X \to X$ una función tal que

$$||f(x) - f(y)|| \geq c||x - y||, \ \forall x, y \in X$$

con $c > 1$. Demuestre que f tiene a lo máximo un punto fijo. Luego demuestre que si f es sobreyectiva entonces f tiene un único punto fijo.

B4. Sea E un espacio normado y $K \subseteq E$ un conjunto compacto. Considere $f : K \to K$ una función que verifica:

$$||f(x) - f(y)|| < ||x - y||, \quad \text{para todo } \ x, y \in K \text{ con } \ x \neq y.$$

El objetivo de este ejercicio es demostrar que f tiene un único punto fijo en K.

(a) Sea $g : K \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$g(x) = ||f(x) - x||, \quad x \in K.$$

Justifique que esta función alcanza su mínimo en K.

(b) Si denotamos $\overline{x}$ a este mínimo, demuestre que se debe tener que:

$$||\overline{x} - f(\overline{x})|| \leq ||x - f(x)||, \quad \text{para todo } x \in K.$$

Concluya a partir de esto que $\overline{x} = f(\overline{x})$.

(c) Demuestre que f tiene un único punto fijo en K.

B5. Sea $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ una función definida como sigue:

$$T[f](x) = \frac{2}{5}\int_0^x (x^5 + t^{12})f(t)dt + \cosh(x), \quad \text{para todo } x \in [0,1].$$

Usando el teorema del punto de Banach demuestre que existe $f \in \mathcal{C}([0,1]$ tal que

$$T[f] = f.$$

Indicación: Recuerde que si h es una función *positiva* y tenemos que $a < b < c$ entonces:

$$\int_a^b h(t)dt \leq \int_a^c h(t)dt$$

B6. Sea E un espacio de Banach, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ y $\{r_n\}_n \subseteq \mathbb{R}_+$ dos sucesiones tales que $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r \neq 0$ y $\overline{B}(a_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \overline{B}(a_n, r_n)$.

(a) Muestre que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(b) Demuestre que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B}(a_n, r_n)$$

es una bola cerrada y no vacía.

B7. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $A \subseteq E$ un conjunto no vacío. Sea $f : A \to E$ una función Lipschitz de constante $k < 1$. Sea $x \in A$ y

$$r = \frac{||x - f(x)||}{1 - k}$$

Muestre que si $\overline{B}(x, r) \subseteq A$, entonces f tiene un punto fijo y este es único.