Cálculo en Varias Variables

Apunte del curso

(grupos MA2001-01 y MA2001-08)

Aris Daniilidis

Departamento de Ingeniería Matemática

Equipo docente otoño 2021:

Aris Daniilidis	(cátedra)
Sebastián Bustos Atalah	(auxiliar)
Felipe Hernández Castro	(auxiliar)

(Parte III-A) Optimización

La tercera parte de este curso contiene dos temas sumamente importantes para el estudio de funciones de varias variables a valores reales: los problemas de *optimización* y la *integración*.

En la parte de optimización, nos interesamos en buscar los valores óptimos (mínimos o máximos) locales de una función suficientemente diferenciable, tipicamente de clase $\mathcal{C}^2$. En particular, veremos como utilizar las derivadas del primer y del segundo orden para formular condiciones necesarias y condiciones suficientes de optimalidad. Dichas condiciones nos permitirán llevar a cabo este estudio desde el punto de vista tanto teórico como práctico, y detectar los puntos extremos de una función. Nos interesaremos primero en problemas de optimización sin restricciones, donde buscaremos los puntos donde se alcanzan los valores mínimos y máximos locales, y luego estudiaremos los mismos problemas, pero sometidos a unas restricciones formuladas por ecuaciones (restricciones de igualdad). En este último tema, presentaremos la llamada teoría de Lagrange. También estudiaremos conjuntos convexos y funciones convexas. Estas últimas poseen un comportamiento destacable en optimización.

Índice de contenidos

1. Matrices simétricas

En la Parte II del curso hemos visto el teorema de Schwarz que garantiza que la matriz Hessiana $\mathcal{H}_f(x)$ de una función $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ en cualquier punto $x \in \mathbb{R}^d$ es una matriz simétrica. Empezamos esta tercera parte con un recordatorio del álgebra lineal sobre dichas matrices.

1.1. Diagonalización de matrices simétricas.

Anotemos por $\mathcal{M}_{d\times d}$ el espacio vectorial de las matrices reales $d \times d$. Anotemos luego por $\boldsymbol{S}^d$ el subespacio vectorial de las matrices reales simétricas $d \times d$ (es decir, $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, d\}$) y por $\boldsymbol{\Delta}^d$ el subespacio de las matrices diagonales ($a_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$). Es facil ver que dichos espacios tienen dimensiones

$$\dim(\boldsymbol{\Delta}^d) = d, \qquad \dim(\boldsymbol{S}^d) = \frac{d(d+1)}{2} \qquad \text{y} \qquad \dim(\mathcal{M}_{d\times d}) = d^2.$$

Luego, anotemos por $\boldsymbol{U}^d$ el subconjunto de $\mathcal{M}_{d\times d}$ de las *matrices unitarias*, es decir, las matrices invertibles cuya inversa es igual a la matriz transpuesta:

$$U \in \boldsymbol{U}^d \qquad \text{si y sólo si} \qquad U^{-1} = U^T.$$

Se puede observar que el determinante de cada matriz unitaria es igual a 1 o a -1 y que $(\boldsymbol{U}^d, \cdot)$ es un grupo con la operación "multiplicación de matrices" y con elemento neutro la matriz identidad. También es conocido que si $U \in \boldsymbol{U}^d$, entonces anotando por $U^1, U^2, \ldots, U^d$ sus d–columnas, las coordenadas de dichas columnas corresponden a vectores ortonornales de $\mathbb{R}^d$, es decir

$$\langle U^i, U^j \rangle = \delta_i^j \qquad \text{para cada } i, j \in \{1, \ldots, d\}.$$

La misma conclusión es cierta si en lugar de las columnas, consideramos las d–lineas $U_1, U_2, \ldots, U_d$ de U. En otras palabras, la matriz U representa una aplicación lineal que corresponde a un cambio de base ortonormal.

Recordamos ahora la siguiente definición.

Definición 1.1 (valores propios, vectores propios)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_{d\times d}$. Llamamos *valor propio* λ de A, y escribimos[1] $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$, cualquier solución del polinomio característico

$$p_A(x) = \det(A - xI), \qquad x \in \mathbb{C}.$$

Un vector $u \in \mathbb{R}^d$, $u \neq 0$, se dice *vector propio* de A, si existe $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ tal que $Au = \lambda u$. En este caso, decimos que u es un vector propio[2] asociado al valor propio λ.

Gracias al teorema fundamental del álgebra, cada matriz $A \in \mathcal{M}_{d\times d}$ tiene exactamente d–valores propios complejos contados con su multiplicidad (es decir, no necesariamente

[1] El conjunto $\mathrm{sp}(A)$ de los valores propios se llama *espectro* de la matriz A.

[2] Es obvio que si u es un vector propio, entonces cada vector de forma tu (múltiple de u) con $t \neq 0$, también es un vector propio de A.

distintos). Las matrices simétricas $A \in \boldsymbol{S}^d$ tienen un comportamiento idoneo en esta teoría, dado que si A es una matriz simétrica, entonces se puede asegurar que:

– todos los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathrm{sp}(A)$ son *reales* (no necesariamente distintos);

– existen d–vectores propios $u^1, u^2, \ldots, u^d$ linealmente independientes que consituyen una *base ortonormal* [3]del espacio $\mathbb{R}^d$;

– anotando por U la matriz unitaria cuyas columnas son los vectores propios anteriores, se tiene que

$$U^T A U = D \in \boldsymbol{\Delta}^d,$$

donde la matriz diagonal D está formada por los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ de A de forma que $Au^j = \lambda^j u^j$, para todo $j \in \{1, \ldots, d\}$.

Resumimos todo lo anterior con el siguiente enunciado:

Proposición 1.2 (diagonalización de matrices simétricas)**.** Las matrices simétricas son diagonalizable en el cuerpo de los reales, mediante la acción del grupo ortonormal $\boldsymbol{U}^d$.

Ejemplo 1.3 (diagonalización de la Hessiana)**.** Consideramos la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por la formula

$$f(x, y, z) = xy^2 - \sin(z), \qquad \text{para todo } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Es obvio que dicha función es de clase $\mathcal{C}^2$ (de hecho, es analítica real) con derivada

$$Df(x, y, z) = (y^2,\, 2xy,\, -\cos(z))$$

y Hessiana (que es necesariamente una matriz simétrica)

$$\mathcal{H}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 0 \\ 2y & 2x & 0 \\ 0 & 0 & \sin(z) \end{pmatrix}.$$

Para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, la Hessiana $\mathcal{H}_f(x, y, z)$ es diagonalizable y tiene valores propios reales, que son

$$\lambda_1 = x + \sqrt{x^2 + 4y^2}, \qquad \lambda_2 = x - \sqrt{x^2 + 4y^2} \qquad \text{y} \qquad \lambda_3 = \sin(z).$$

Dejamos al lector la tarea de encontrar una base ortonormal formada de vectores propios, en la cual $\mathcal{H}_f(x, y, z)$ se representa por la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} x + \sqrt{x^2 + 4y^2} & 0 & 0 \\ 0 & x - \sqrt{x^2 + 4y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sin(z) \end{pmatrix}.$$

[3] Una base se dice ortonormal, si sus elementos son vectores mutualmente ortogonales y tienen norma igual a 1.

1.2. Matrices semi-definidas positivas

Empezamos con la siguiente definición.

Definición 1.4 (matriz semi-definida positiva)**.** Una matriz simétrica $A \in \boldsymbol{S}^d$ se dice semi-definida positiva (respectivamente, definida positiva), y anotamos[4] $A \in \boldsymbol{S}^d_+$ (respectivamente, $A \in \boldsymbol{S}^d_{++}$), si todos sus valores propios son positivos (respectivamente, estrictamente positivos).

La siguiente proposition es una caracterización de las matrices (semi-) definidas positivas.

Proposición 1.5 (caracterización de las matrices (semi-)definidas positivas)**.** Sea $A \in \boldsymbol{S}^d$ una matriz simétrica. Entonces:
(i). $A \in \boldsymbol{S}^d_+$ si y sólo si $u^T A u \geq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^d$.
(ii). $A \in \boldsymbol{S}^d_{++}$ si y sólo si $u^T A u > 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Demostración. Anotemos por $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ los d–valores propios reales (no necesariamente distintos) de la matriz simétrica A y consideramos $\mathcal{B} = \{u^1, \ldots, u^d\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^d$ formada por vectores propios correspondientes, es decir, $Au^i = \lambda_i u^i$ para cada $i \in \{1, \ldots, d\}$. Mostraremos a continuación la equivalencia (ii). (La equivalencia (i) se demuestra de forma muy similar y se deja como ejercício al lector.)
Supongamos primero que $u^T A u > 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Entonces, substituyendo u por u^i deducimos (sucesivamente, para todo $i \in \{1, \ldots, d\}$) que

$$(u^i)^T A u^i = (u^i) \lambda_i u^i = \lambda_i \|u^i\|^2 = \lambda_i > 0,$$

es decir, A es definida positiva.
Supongamos ahora que $A \in \boldsymbol{S}^d_{++}$ (es decir, $\lambda_i > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, d\}$) y consideramos un vector $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ arbitrario. Sean $(x_1, \ldots, x_d)$ las coordenadas de u en la base $\mathcal{B}$, es decir, $u = \sum_{i=1}^{d} x_i u^i$. Entonces tenemos que:

$$u^T A u = u = \left(\sum_{j=1}^{d} x_j u^j \right)^T A \left(\sum_{i=1}^{d} x_i u^i \right) = \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{d} x_i x_j \underbrace{(u^j)^T \overbrace{A u^i}^{\lambda_i u^i}}_{\lambda_i \, \delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i |x_i|^2 > 0.$$

La demostración es completa. □

Ejercicio 1.6. Sea $A \in \boldsymbol{S}^d$ una matriz simétrica. Anotando

$$m = \min\{\lambda : \ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\} \qquad \text{y} \qquad M = \max\{\lambda : \ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$$

muestren que para todo $x \in \mathbb{R}^d$ se tiene que

$$m \, ||x||^2 \ \leq \ x^T A x \ \leq \ M \, ||x||^2.$$

(*Indicación*: Siguen los pasos de la demostración de la Proposición 1.5)

[4] A veces se usa también la notación $A \succeq 0$ para una matriz semi-definida positiva y $A \succ 0$ para una matriz definida positiva.

2. Optimización sin restricciones

En esta parte nos interesaremos en el estudio de sus puntos (localmente) extremos, es decir los mínimos y los máximos (locales) de una función f definida en un espacio normado $(X, ||\cdot||)$ a valores reales. Empezamos con la siguiente definición.

Definición 2.1 (mínimo/máximo local)**.** Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función y $\bar{x} \in X$. Decimos que $\bar{x}$ es un *mínimo* (respectivamente, *máximo*) *local* de f si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B(\bar{x}, \delta)$ se tiene:

$$f(x) \geq f(\bar{x}) \qquad (\text{respectivamente,} \quad f(x) \leq f(\bar{x})\,). \tag{1}$$

Si la desigualdad anterior se cumple de forma estricta cuando $x \neq \bar{x}$, entonces hablamos de *mínimo local estricto* (respectivamente, *máximo local estricto*).

Si (1) se satisface para todo $x \in X$ entonces decimos que $\bar{x}$ es un mínimo (respectivamente, máximo) global de f.

Es fácil ver que un punto $\bar{x} \in X$ es un mínimo local (respectivamente, global) de la función f si y sólo si es un máximo local (respectivamente, global) de la función $-f$.

Proposición 2.2 (condición necesária de primer orden)**.** Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Supongamos que f tiene un mínimo (resp. máximo) local en $\bar{x} \in X$. Entonces $Df(\bar{x}) = 0$.

Demostración. Dado que $D(-f)(\bar{x}) = -Df(\bar{x})$ es suficiente mostrar el resultado cuando $\bar{x} \in X$ es un mínimo local. Sea $u \in X \setminus \{0\}$ (dirección arbitraria) y considere la función $\varphi(t) := f(\bar{x} + tu)$, $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\varphi(0) = f(\bar{x}) \qquad \text{y} \qquad \varphi'(0) = df(\bar{x}; u) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + tu) - f(\bar{x})}{t}.$$

Observamos que si $t \geq 0$, entonces

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{f(\bar{x} + tu) - f(\bar{x})}{t} \geq 0,$$

y por lo tanto

$$\varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + tu) - f(\bar{x})}{t} \geq 0$$

mientras que si $t \leq 0$, entonces

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \frac{f(\bar{x} + tu) - f(\bar{x})}{t} \leq 0,$$

y por lo tanto

$$\varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + tu) - f(\bar{x})}{t} \leq 0.$$

Se deduce entonces que

$$Df(\bar{x})(u) = df(\bar{x}; u) = \varphi'(0) = 0.$$

Dado que $u \in X \setminus \{0\}$ es una dirección arbitraria, se concluye que $Df(\bar{x}) = 0$ y la demostración es completa. $\square$

Corolario 2.3 (dimensión finita)**.** *En el caso $X = \mathbb{R}^d$, deducimos que si $\bar{x}$ es un mínimo (respectivamente, máximo) local de f entonces se cumple:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0, \qquad \textit{para todo } i \in \{1, \ldots, d\}. \tag{2}$$

La condición anterior es muy importante, pues es una manera de reducir el problema abstracto de detectar todos los puntos extremos de f en una ecuación matemática, conocida como ecuación de Euler. En dimensión finita, los puntos candidatos son exactamente las soluciones[5] del sistema $(d \times d)$ dado por (2).

Definición 2.4 (puntos críticos)**.** Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Un punto $\bar{x} \in X$ se dice *punto crítico* de f (anotamos $\bar{x} \in \mathrm{Crit}\, f$) si $Df(\bar{x}) = 0$.

La Proposición 2.2 asegura que los mínimos y los máximos (locales o globales) son todos puntos críticos, pero estos últimos podrían ser más numerosos, véase Figura 1. Por ejemplo, la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ no tiene ningún máximo o mínimo local, mientras que tiene puntos críticos: $\mathrm{Crit}\, f = \{(0, 0)\}$.

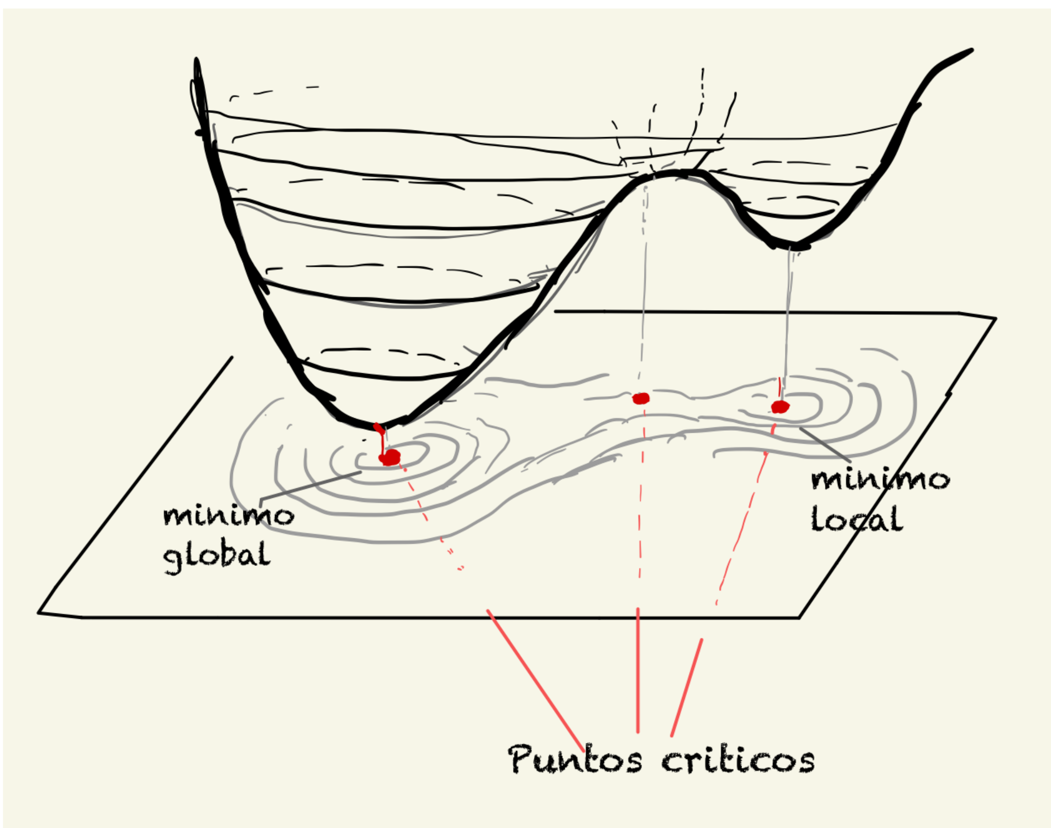

Figura 1: Ilustración: puntos críticos de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

[5]Cabe mencionar que se trata de un sistema no-lineal. Dichos sistemas, por lo general, no admiten soluciones explicitas. En el campo de optimización numérica se desarrollar algoritmos para aproximar las soluciones dentro una precisión deseada.

2.1. Condiciones necesarias de optimalidad

A partir de ahora nos limitaremos en el caso de dimensión finita, y formularemos condiciones necesarias (y en la próxima subsección, condiciones suficientes) de optimalidad.

Proposición 2.5 (condiciones necesarias de segundo orden)**.** Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Supongamos que f tiene un mínimo local en $\bar{x} \in X$. Entonces

$$\nabla f(\bar{x}) = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathcal{H}_f(\bar{x}) \succeq 0.$$

Demostración. Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ un mínimo local de f. Por el Corolario 2.3 tenemos que $\nabla f(\bar{x}) = 0$. Nuestro objetivo ahora es establecer que $\mathcal{H}_f(\bar{x}) \in \mathbf{S}^d_+$. Para eso, se debe mostrar que $u^T \mathcal{H}_f(\bar{x}) u \geq 0$, para todo $u \in \mathbb{R}^d$ (*c.f.* Proposición 1.5(i)). Si $u = 0$, la desigualdad deseada se cumple trivialmente, por lo tanto fijamos $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ (arbitrario) y consideramos la función

$$\varphi(t) := f(\bar{x} + tu), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Entonces para cada $t \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\varphi'(t) = df(\bar{x} + tu; u) = Df(\bar{x} + tu)(u) = [\nabla f(\bar{x} + tu)]^T \cdot u,$$

y $\varphi'(0) = 0$ (*c.f.* Proposición 2.2). Tomando segunda derivada deducimos que

$$\varphi''(t) = D^2 f(\bar{x} + tu)(u, u) = u^T \mathcal{H}_f(\bar{x} + tu) u \qquad \text{y} \qquad \varphi''(0) = u^T \mathcal{H}_f(\bar{x}) u. \tag{3}$$

Por la Definición 2.1, existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (-\delta, \delta)$

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \varphi(t) - \varphi(0) - \underbrace{\varphi'(0)\, t}_{=0} \geq 0,$$

y por lo tanto se deduce que:

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0) - \varphi'(0)\, t}{t^2} \geq 0, \qquad \text{para todo } t \in (-\delta, \delta).$$

Tomando el límite de la expresión a izquierda cuando $t \to 0$ (y aplicando dos veces la regla de l'Hospital para salir de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$) obtenemos:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0) - \varphi'(0)\, t}{t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi'(t) - \varphi'(0)}{2t} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi''(t)}{2} \geq 0.$$

Deducimos de (3) y del hecho que la segunda derivada de f es continua que:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi''(t)}{2} = \frac{1}{2} u^T \left(\lim_{t \to 0} \mathcal{H}_f(\bar{x} + tu) \right) u = \frac{1}{2} u^T \mathcal{H}_f(\bar{x}) u \geq 0.$$

La demostración es completa. $\square$

El siguiente corolario es consecuencia directa del hecho que los máximos locales de f coinciden con los mínimos locales de $-f$.

Corolario 2.6 (máximo local)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Supongamos que f tiene un máximo local en $\bar{x} \in X$. Entonces*[6]

$$\nabla f(\bar{x}) = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathcal{H}_f(\bar{x}) \preceq 0.$$

[6] $A \preceq 0$ (o $A \in \mathbf{S}^d_-$) significa que la matriz A es semi-definida negativa, es decir sus valores propios son negativos o cero. De forma equivalente, $u^T A u \leq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^d$.

2.2. Condiciones suficientes de optimalidad

En la subsección anterior hemos visto condiciones necesárias de optimalidad, es decir, condiciones que nos permiten determinar un conjunto de puntos candidatos para ser mínimo o máximo local. Dichas condiciones sirven para excluir/descartar puntos: cada punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ que no es crítico ($\nabla f(\bar{x}) \neq 0$) o que es crítico pero la Hessiana $\mathcal{H}_f(\bar{x})$ dispone a la vez valores propios positivos y negativos, no puede ser extremo local para la función f. Al mismo tiempo, no se puede asegurar que los puntos que cumplen las condiciones de la Proposición 2.5 (respectivamente, del Corolario 2.6) son mínimos (respectivamente, máximos) locales. A continuación veremos condiciones suficientes de optimalidad, es decir, condiciones que aseguran que un punto $\bar{x}$ es extremo.

Proposición 2.7 (condiciones suficientes)**.** Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Supongamos que el punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ satisface:

$$\nabla f(\bar{x}) = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathcal{H}_f(\bar{x}) \succ 0.$$

Entonces $\bar{x}$ es un mínimo local estricto de f.

Demostración. Sea $m = \min\{\lambda : \ \lambda \in \mathcal{H}_f(\bar{x})\} > 0$. Dado que f es de clase $\mathcal{C}^2$, la función $x \mapsto \mathcal{H}_f(x)$ es continua y por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que

$$||\mathcal{H}_f(x) - \mathcal{H}_f(\bar{x})|| < \frac{m}{2}, \qquad \text{para todo } x \in B(\bar{x}, \delta).$$

Deducimos que para todo $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ y $x \in B(\bar{x}, \delta)$.se tiene que:

$$\left|u^T \mathcal{H}_f(x)u - u^T \mathcal{H}_f(\bar{x})u\right| = \left|u^T \left(\mathcal{H}_f(x) - \mathcal{H}_f(\bar{x})\right) u\right| = \|\mathcal{H}_f(x) - \mathcal{H}_f(\bar{x})\| \cdot ||u||^2 < \frac{m}{2}||u||^2.$$

Por el Ejercício 1.6 concluimos que

$$u^T \mathcal{H}_f(x)u \ > \ \frac{m}{2}||u||^2 \ > \ 0\,,$$

para todo $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ y $x \in B(\bar{x}, \delta)$. Escribimos la serie de Taylor de la función f de orden 2 en forma exacta alrededor del punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$. Entonces para todo $x \in B(\bar{x}, \delta)$, con $x \neq \bar{x}$ ponemos

$$u = \frac{x - \bar{x}}{||x - \bar{x}||} \qquad \text{y} \qquad t = ||x - \bar{x}||$$

y deducimos que existe $\beta \in [0, 1]$ tal que:

$$f(x) = f(\bar{x} + tu) = f(\bar{x}) + \underbrace{\nabla f(\bar{x})^T u}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2}u^T \mathcal{H}_f(\bar{x} + \beta u)u}_{> \frac{m}{2}\|u\|^2} > f(\bar{x}) + \frac{m}{2}||u||^2 > f(\bar{x}),$$

es decir, $f(x) > f(\bar{x})$, para todo $x \in B(\bar{x}, \delta) \setminus \{\bar{x}\}$. Concluimos que $\bar{x}$ es un mínimo local estricto de f $\square$

Resumiendo, si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^2$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ entonces:

$$\left.\begin{array}{r}\nabla f(\bar{x}) = 0\\ \mathcal{H}_f(\bar{x}) \succ 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\begin{array}{c}\bar{x}\text{ mínimo}\\ \text{local estricto}\end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{c}\bar{x}\text{ mínimo}\\ \text{local de } f\end{array}\right] \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\nabla f(\bar{x}) = 0\\ \mathcal{H}_f(\bar{x}) \succeq 0\end{array}\right.$$

y de forma análoga:

$$\left.\begin{array}{r}\nabla f(\bar{x}) = 0\\ \mathcal{H}_f(\bar{x}) \prec 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\begin{array}{c}\bar{x}\text{ máximo}\\ \text{local estricto}\end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{c}\bar{x}\text{ máximo}\\ \text{local de } f\end{array}\right] \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\nabla f(\bar{x}) = 0\\ \mathcal{H}_f(\bar{x}) \preceq 0\end{array}\right.$$

Ninguna de las implicancias anteriores se puede transformar en equivalencia, includo en el caso de dimensión 1 ($d = 1$). Invitamos al lector de encontrar los contrejemplos adecuados.

2.3. Ejemplos

En esta parte, ilustraremos la teoría mediante tres ejemplos.

Ejemplo 2.8 (estudio de optimalidad)**. (i).** Consideramos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por la formula

$$f(x, y) = x^2 + (x + 1)^3 y^2, \qquad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces

$$\nabla f(x, y) = \big(2x + 3(x + 1)^2 y^2,\ 2(x + 1)^3 y\big)$$

y

$$\operatorname{Crit} f = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \nabla f(x, y) = (0, 0)\big\} = \{(0, 0)\}$$

Por lo tanto hay sólo un punto candidato para ser extremo local, el punto $(0, 0)$. Para decidir, miramos la Hessiana de f en este punto:

$$\mathcal{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 6(x + 1)y^2 & 6(x + 1)^2 y \\ 6(x + 1)^2 y & 2(x + 1)^3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \succ 0.$$

Dado que $\mathcal{H}_f(0, 0)$ es definida positiva, por la Proposición 2.7 deducimos que $(0, 0)$ es un mínimo local estricto de f, es decir, existe $\delta > 0$ tal que para todo $(x, y) \in B((0, 0), \delta)$, con $(x, y) \neq (0, 0)$ se tiene que $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$. Invitamos al lector de comprobar que $(0, 0)$ no es un mínimo global de f, es decir, esta función no tiene mínimo ni máximo global y tampoco tiene máximos locales.

(ii). Consideramos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con

$$f(x, y) = x^2 + (xy - 1)^2, \qquad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

En este caso,

$$\nabla f(x, y) = (2x + 2(xy - 1)y,\ 2(xy - 1)x)$$

y

$$\operatorname{Crit} f = \{(0,0)\}\,.$$

Observamos que

$$f(0,0) = 1, \quad \text{pero } f(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}) = \frac{1}{n} + (\frac{1}{n} - 1)^2 < 1,$$

y por lo tanto f no tiene mínimo local (a pesar que sea acotada inferiormente por 0). De hecho, calculando la Hessiana

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2-2y^2 & 4xy-2 \\ 4xy-2 & 2x^2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

vemos que $\mathcal{H}_f(0,0)$ tiene un valor propio positivo y un negativo, por lo tanto $(0,0)$ no puede ser extremo.

(iii). Consideramos la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con

$$f(x,y) = x^2 + y^2(1-x^3), \qquad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

En este caso,

$$\nabla f(x,y) = \big(2x - 3x^2y^2,\ 2y(1-x^3)\big) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2-6xy^2 & -6x^2y \\ -6x^2y & 2(1-x^3) \end{pmatrix}$$

y obtenemos 3 puntos críticos (que son candidatos para ser extremos):

$$\operatorname{Crit} f = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \nabla f(x,y) = (0,0)\big\} = \left\{(0,0),\ (1, \sqrt{\frac{2}{3}}),\ (1, -\sqrt{\frac{2}{3}})\right\}$$

De estos 3 puntos, sólo el punto $(0,0)$ (con valor $f(0,0) = 0$) es un mínimo local estricto de f, dado que

$$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \succ 0.$$

Dicho punto no es mínimo global, dado que

$$f(n,n) = n^2 + n^2(1-n^3) = 2n^2 - n^5 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Dejamos al lector de comprobar, mediante las Hessianas, que los otros dos puntos críticos no son extremos locales.

3. Convexidad

La convexidad es una propiedad importante en optimización. La noción hace uso de la estructura lineal y se define tanto para subconjuntos de un espacio vectorial, como para funciones definidas en dicho espacio a valores reales. En ambos casos veremos que la convexidad es una propiedad rígida y estable bajo ciertas operaciones.

3.1. Conjuntos convexos

Sea X un espacio vectorial y $x, y \in X$. Definimos por

$$[x, y] := \{tx + (1-t)y : \ t \in [0,1]\}$$

el segmento que une el punto x al punto y. También haremos uso del segmento semi-abierto

$$(x, y] := \{tx + (1-t)y : \ t \in [0,1)\}.$$

Los segmentos $[x, y)$ y (x, y) se definen de forma análoga.

Definición 3.1 (conjunto convexo)**.** Un conjunto $K \subset X$ se dice convexo, si para todo $x, y \in K$ se tiene que $[x, y] \subset K$. (En otras palabras, K contiene todos los segmentos cuyas extremidades le pertenecen[7].)

Las siguientes dos proposiciones muestran que la convexidad de un conjunto es estable bajo las operaciones topológicas de tomar interior o clausura.

Proposición 3.2 (interior de convexo es convexo)**.** Sea $K \subset X$ un conjunto convexo. Entonces.

(i). Para cada $x \in K$ y cada $y \in \operatorname{int} K$ se tiene: $(x, y] \subset \operatorname{int} K$.

(ii). El conjunto $\operatorname{int} K$ (interior de K) es convexo.

Demostración. (i). La aserción es trivialmente cierta si $\operatorname{int} K = \emptyset$, por lo tanto podemos suponer que K tiene interior no vacío. En este caso, sea $y \in \operatorname{int} K$ (arbitrario) y sea $\delta > 0$ tal que $B(y, \delta) \subset K$. Para todo $x \in K$ y $z \in (x, y]$ observamos que

$$\lambda = \frac{||x - z||}{||x - y||} \in (0, 1].$$

Dejamos al lector la tarea de demostrar que $B(z, \lambda\delta) \subset K$ (véase Figura 2), y deducir en particular que $z \in \operatorname{int} K$.

(ii). Si $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, la aserción es una consecuencia inmediata de la parte (i). En el caso que K no tiene interior, entonces la aserción es cierta de manera trivial (el conjunto vacío es convexo). □

[7] Observen que el conjunto vacío es un conjunto convexo, pues cumple trivialmente esta definición.

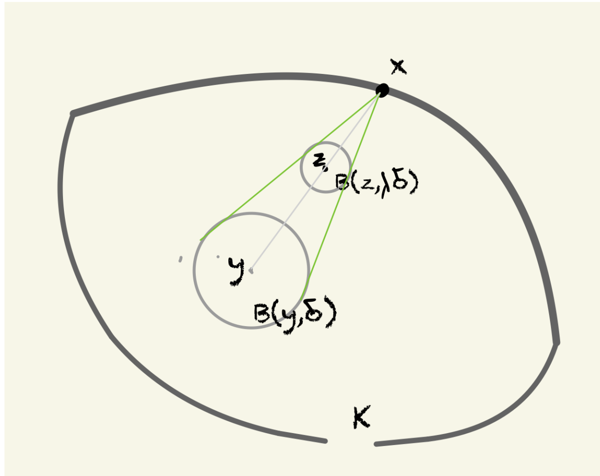

Figura 2: Ilustración: $B(z, \lambda\delta) \subset K$.

Proposición 3.3 (clausura de convexo es convexo)**.** Sea $K \subset X$ un conjunto convexo. Entonces.

(i). El conjunto $\mathrm{cl}\, K$ (clausura de K) es convexo

(ii). Si $\mathrm{int}\, K \neq \emptyset$, entonces: $\overline{\mathrm{int}\, K} = \mathrm{cl}\, K$.

Demostración. (i). Sea $x, y \in \mathrm{cl}\, K$ y $t \in (0, 1)$. Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$, $\{y_n\}_{n\geq 1}$ dos sucesiones en K tales que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Entonces para todo $n \geq 1$, se tiene que

$$z_n := tx_n + (1-t)y_n \in K \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = t \lim_{n\to\infty} x_n + (1-t) \lim_{n\to\infty} y_n = tx + (1-t)y \in \mathrm{cl}\, K.$$

Lo anterior muestra que $\mathrm{cl}\, K$ es convexo.

(ii). Fijamos $y \in \mathrm{int}\, K$. Sea $x \in K$ (arbitrario). Entonces por la Proposición 3.2(i) deducimos que $(x, y] \subset \mathrm{int}\, K$ y por lo tanto, $x \in \overline{\mathrm{int}\, K}$. Eso muestra que $K \subset \overline{\mathrm{int}\, K}$ de lo que se obtiene que $\mathrm{cl}\, K = \overline{K} \subset \overline{\mathrm{int}\, K}$. La inclusión inversa es trivial dado que $\mathrm{int}\, K \subset K$. □

Por último, la siguiente proposición muestra que los conjuntos convexos son estables bajo sumas algebraicas e intersecciones. La demostración es inmediata y se deja como ejercicio al lector.

Proposición 3.4 (estabilidad por intersección)**. (i).** Si K, L son conjuntos convexos, entonces el conjunto $K + L$ es convexo.

(ii). Si $(K_i)_{i\in I}$ es una familia de conjuntos convexos, entonces la intersección $\bigcap_{i\in I} K_i$ es un conjunto convexo (posiblemente vacío).

3.2. Funciones convexas

En esta parte consideramos funciones definidas en un espacio normado X (o en un subconjunto $D \subset X$) a valores reales. Sea $f : D \subset X \to \mathbb{R}$ una tal función. El conjunto (subconjunto de $X \times \mathbb{R}$)

$$\operatorname{epi} f := \{(x, \beta) \in X \times \mathbb{R} : \ f(x) \leq \beta\}$$

se llama *epígrafo* de f. Observamos que la proyección de dicho conjunto en X coincide con el dominio $D = \operatorname{dom} f$ de f. Añadiendo por defecto el valor $+\infty$ a todos los puntos del conjunto $X \setminus D$, podriamos considerar que f está definida a todo el espacio con valores en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Este punto de vista permite una mejor identificación de f con su epígrafo, particularmente útil cuando este último es convexo.

Definición 3.5 (función convexa)**.** Una función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se dice convexa, si su epígrafo $\operatorname{epi} f$ es un conjunto convexo del espacio producto $X \times \mathbb{R}$.

Es fácil ver que si f es convexa, entonces su dominio efectivo

$$D = \operatorname{dom} f = \{x \in X : \ f(x) \in \mathbb{R}\}$$

también es un conjunto convexo de X. (La convexidad se mantiene por aplicaciones lineales y la proyección es una aplicación lineal.) La siguiente proposición proporciona una caracterización analítica de la convexidad de una función.

Proposición 3.6 (Convexidad de una función)**.** Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función. Los siguientes son equivalentes:

(i). La función f es convexa ;

(ii). Para cada $x, y \in X$ y $t \in [0, 1]$ se tiene:

$$f(ty + (1-t)x) \leq t f(y) + (1-t) f(x) \tag{4}$$

Demostración. (i)$\Longrightarrow$(ii). Sea $x, y \in X$. Si $f(x) = +\infty$ o $f(y) = +\infty$, entonces la desigualdad (4) se satisface de forma trivial. Por lo tanto, podemos suponer que $x, y \in \operatorname{dom} f$ y considerar los puntos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ en el epígrafo de f. Por la convexidad de este último conjunto deducimos que:

$$t\,(y, f(y)) + (1-t)\,(x, f(x)) \equiv (ty + (1-t)x,\ t f(y) + (1-t) f(x)) \in \operatorname{epi} f$$

lo que se traduce directamente a la desigualdad (4).

(ii)$\Longrightarrow$(i). Supongamos que $\operatorname{epi} f$ no es convexo, es decir, existen $(x_i, \beta_i) \in \operatorname{epi} f$, $i \in \{1, 2\}$ y $t \in (0, 1)$ tales que

$$t\,(x_1, \beta_1) + (1-t)\,(x_2, \beta_2) \equiv (tx_1 + (1-t)x_2,\ t\beta_1 + (1-t)\beta_2) \notin \operatorname{epi} f.$$

Lo anterior significa que

$$t\beta_1 + (1-t)\beta_2 < f(tx_1 + (1-t)x_2).$$

Tomando en cuenta que $\beta_i \geq f(x_i)$, $i \in \{1, 2\}$, y aplicando (4) con $y = x_1$ y $x = x_2$ obtenemos una contradicción. $\square$

Basado en la caracterización (4) podemos mostrar que cualquier combinación lineal positiva de funciones convexas es una función convexa.

Corolario 3.7 (las funciones convexas forman un cono convexo)**.** *Sean f_1, f_2 dos funciones convexas definidas en un espacio vectorial X. Entonces para cada $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ la función $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ es convexa.*

Demostración. Invitamos al lector de comprobar directamente que la función

$$x \mapsto (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$$

satisface la desigualdad (4), siempre y cuando las funciones f_1 y f_2 lo hacen. $\square$

Corolario 3.8 (supremo de convexas es convexa)**.** *Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de funciones convexas. Supongamos que existe $x \in X$ tal que $\sup\limits_{i\in I} f_i(x) < +\infty$. Entonces la función*

$$f := \sup_{i\in I} f_i \qquad \textit{es convexa.}$$

Demostración. Invitamos al lector de mostrar lo pedido trabajando con epígrafos y utilizando la Proposición 3.4. $\square$

Antes de continuar, definimos el epígrafo estricto $\mathrm{epi}^{<} f$ de una función f como sigue:

$$\mathrm{epi}^{<} f := \{(x, \beta) \in X \times \mathbb{R} : \ f(x) < \beta\}\,.$$

También recordamos que el grafo de una función es el conjunto

$$\mathrm{Graph}\, f = \{(x, f(x)) \in X \times \mathbb{R} : \ x \in X\} \equiv \mathrm{epi}\, f \setminus \mathrm{epi}^{<} f$$

Invitamos al lector de comprobar que para cada función f definida en X a valores reales se tiene que:

$$\mathrm{int}\,(\mathrm{epi}\, f) \subset \mathrm{epi}^{<} f \qquad \text{y} \qquad \overline{\mathrm{epi}^{<} f} = \mathrm{epi}\, f.$$

Ejercicio 3.9. (i). Muestre que f es convexa si y sólo si el epígrafo estricto $\mathrm{epi}^{<} f$ es un subconjunto convexo de $X \times \mathbb{R}$.

(ii). Encuente un ejemplo[8] de función $f : X \to \mathbb{R}$ donde $\overline{\mathrm{int}\,(\mathrm{epi}\, f)} \subsetneqq \mathrm{epi}\, f$ y concluye que el interior $\mathrm{int}\,(\mathrm{epi}\, f)$ del epígrafo puede ser un subconjunto estricto del epígrafo estricto $\mathrm{epi}^{<} f$.

3.2.1. Inf-convolución

Sean f_1, f_2 dos funciones definidas en un espacio vectorial X a valores reales. Definimos la inf-convolución $f_1 \square f_2$ de estas dos funciones mediante la formula[9]:

$$(f_1 \square f_2)\,(x) = \inf_{y\in X}\ \{f_1(y) + f_2(x-y)\} = \inf_{x_1+x_2=x}\ \{f_1(x_1) + f_2(x_2) : \ x_1, x_2 \in X\}$$

La siguiente proposición es una aplicación de la Proposición 3.4(i).

[8] Eso no puede ocurrir si f es convexa.

[9] Observen que la formula es simétrica: $f_1 \square f_2 = f_2 \square f_1$

Proposición 3.10 (convexidad de la inf-convolución)**.** La inf-convolución $f_1 \Box f_2$ de dos funciones convexas es una función convexa.

Demostración. Sean f_1, f_2 dos funciones convexas. Ponemos $A_i = \text{epi}^{<} f_i$, $i \in \{1,2\}$, y $A = \text{epi}^{<}(f_1 \Box f_2)$. Por el resultado del Ejercicio 3.9 es suficiente mostrar que $A = A_1 + A_2$.

Mostramos primero que $A_1 + A_2 \subset A$. Para eso, consideramos elementos arbitrarios $(x_i, \beta_i) \in A_i$, $i \in \{1,2\}$, es decir, $\beta_i > f_i(x_i)$. Poniendo $x = x_1 + x_2$ se tiene que:

$$\beta_1 + \beta_2 > f_1(x_1) + f_2(x_2) \geq (f_1 \Box f_2)(x)$$

o de forma equivalente

$$(x_1, \beta_1) + (x_2, \beta_2) \equiv (x_1 + x_2, \beta_1 + \beta_2) \in \text{epi}^{<}(f_1 \Box f_2) = A.$$

Mostramos ahora que $A \subset A_1 + A_2$. Consideramos un elemento arbitrario $(x, \beta) \in A = \text{epi}^{<}(f_1 \Box f_2)$, es decir,

$$\beta > (f_1 \Box f_2)(x).$$

Entonces existen $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 + x_2 = x$ tal que

$$\beta > f_1(x_1) + f_2(x_2).$$

Poniendo $r = \beta - (f_1(x_1) + f_2(x_2)) > 0$ observamos que

$$\beta_i := f_i(x_i) + \frac{r}{2} \in \text{epi}^{<} f_i = A_i\,, \quad i \in \{1,2\},$$

luego,

$$(x, \beta) = (x_1, \beta_1) + (x_2, \beta_2) \in A_1 + A_2.$$

La demostración es completa. □

3.2.2. Caracterización de primer orden de la convexidad

En esta parte trabajaremos en un espacio normado $(X, ||\cdot||)$ y presentaremos una caracterización de la convexidad de una función diferenciable en términos de propiedades de su derivada. A partir de esta caracterización, obtendremos un resultado importante en optimización, a saber que los puntos críticos de una función convexa coinciden con sus mínimos globales.

Proposición 3.11 (caracterización de primer orden)**.** Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Los siguientes son equivalentes:

(i). La función f es convexa;

(ii). $f(y) \geq f(x) + Df(x)(y - x)$, para todo $x, y \in X$;

(iii). $(Df(y) - Df(x))\,(y - x) \geq 0$, para todo $x, y \in X$.

Demostración. (i)$\Longrightarrow$ (ii). Sea $x, y \in X$ y $t \in (0,1)$. Por la Proposición 3.6 tenemos:

$$f(ty + (1-t)x) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$$

o de forma equivalente

$$f(x + t(y-x)) \leq f(x) + t\,(f(y) - f(x))$$

de lo cual se deduce:

$$\frac{f(x+t(y-x)) - f(x)}{t} \leq f(y) - f(x), \qquad \text{para todo } t \in (0,1).$$

Tomando el límite cuando $t \to 0^+$ obtenemos:

$$Df(x)(y-x) = df(x; y-x) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t(y-x)) - f(x)}{t} \;\leq\; f(y) - f(x).$$

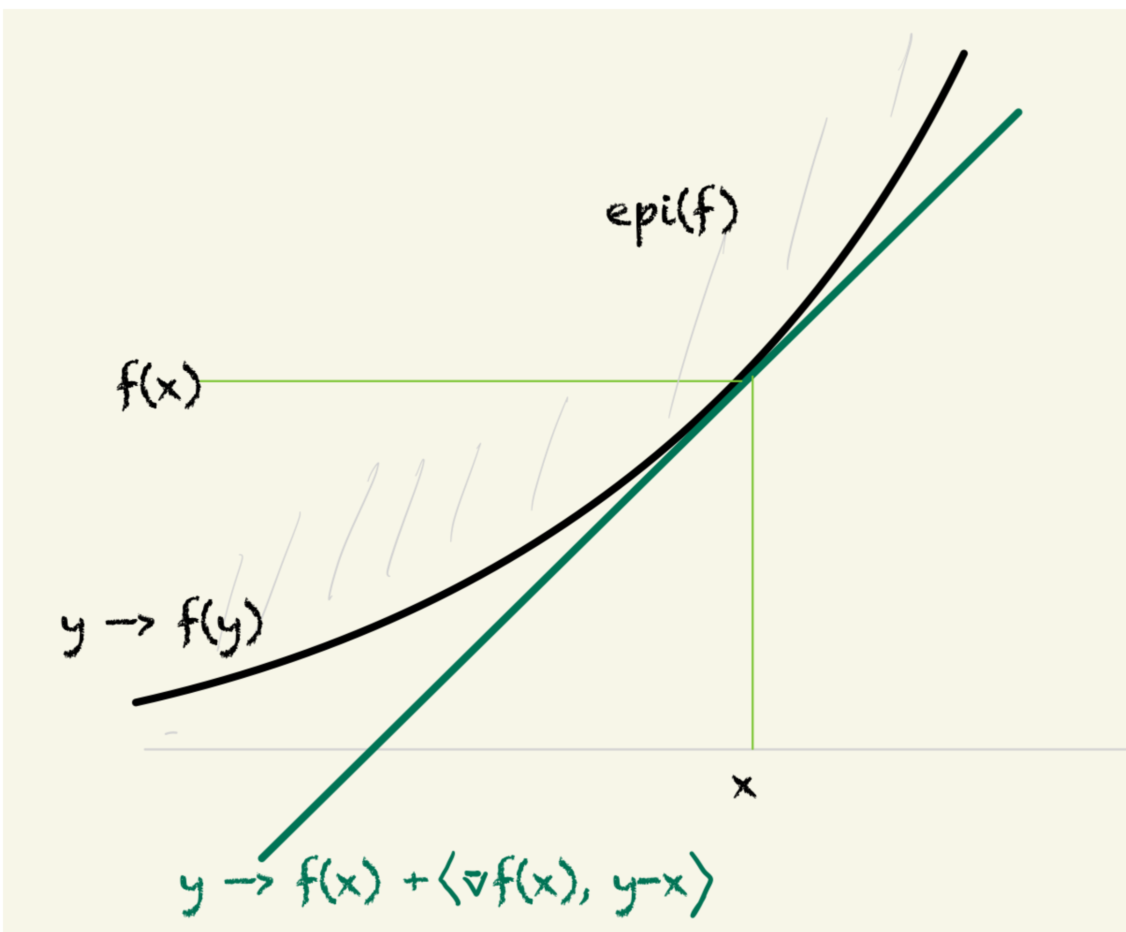

Figura 3: f es mayor que cualquier de sus aproximaciones afines.

(ii)$\Longrightarrow$(iii). Aplicando (ii) para $x, y \in X$ luego para los mismos puntos intercambiados, obtenemos:

$$f(y) \geq f(x) + Df(x)(y-x) \qquad \text{y} \qquad f(x) \geq f(y) + Df(y)(x-y).$$

Sumando estas dos desigualdades y recordando que la derivada $Df(y)$ es lineal, y en particular que $Df(y)(x-y) = -Df(y)(y-x)$, obtenemos directamente (iii).

(iii)$\Longrightarrow$(ii). Fijamos $x, y \in X$ y definimos la función $\phi(t) = f(x + t(y-x))$, $t \in \mathbb{R}$. En particular, $\phi'(t) = Df(x + t(y-x))(y-x)$ y $\phi'(0) = Df(x)(y-x)$. Aplicando (iii) deducimos que para todo $t \in [0,1]$ se tiene:

$$\phi'(t) - \phi'(0) = \frac{1}{t}\left(Df(x + t(y-x)) - Df(x)\right) \cdot (t(y-x)) \geq 0.$$

Aplicando el teorema del valor medio para la función diferenciable ϕ en el intervalo $[0,1]$ deducimos la existencia de un punto $t_* \in (0,1]$ tal que

$$f(y) - f(x) := \phi(1) - \phi(0) = \phi'(t_*) \geq \phi'(0) = Df(x)(y-x).$$

(ii)$\Longrightarrow$(i). Sea $x, y \in X$ y $t \in (0,1)$. Ponemos $z := ty + (1-t)x$. Aplicando (ii) para los puntos y, z y luego para los puntos x, z deducimos

$$f(y) \geq f(z) + Df(z)(y-z) \qquad \text{y} \qquad f(x) \geq f(z) + Df(z)(x-z).$$

Multiplicando la primera desigualdad por t, la segunda por $(1-t)$ y sumando obtenemos:

$$tf(y) + (1-t)f(x) \geq f(z) + Df(z)\underbrace{(t(y-z) + (1-t)(x-z))}_{(ty+(1-t)x)-z} = f(z) - \underbrace{Df(z)(z-z)}_{=0}$$

de lo cual, recordando la definición del z, se obtiene (i).
La demostración es completa. $\square$

La propiedad (iii) de la Proposición 3.6 es conocida como la *motononía de la derivada* de una función convexa. En dimensión 1 corresponde a decir que la derivada f' de una función convexa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función creciente. Por otra parte, la propiedad (ii) es una caracterización mixta de la convexidad y tiene la interpretación de que en cada punto $\bar{x} \in X$ el grafo de la aproximación afín $\ell(x) := f(\bar{x}) + Df(\bar{x})(x - \bar{x})$ de f en el punto $\bar{x}$ se encuentra por debajo del epigrafo de f. Dicha propiedad tiene como corolario directo el siguiente resultado, conocído como el *Teorema local–global*.

Corolario 3.12 (Teorema local–global)**.** *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función convexa diferenciable y $\bar{x} \in X$. Los siguientes son equivalentes:*
(i). *$\bar{x}$ es un punto crítico de f (es decir, $Df(\bar{x}) = 0$) ;*
(ii). *$\bar{x}$ es un mínimo local de f ;*
(iii). *$\bar{x}$ es un mínimo global de f.*

Demostración. Es completamente obvio que (iii)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(i), mientras que la implicancia (i)$\Rightarrow$(iii) es una aplicación directa de la Proposición 3.11(ii). $\square$

3.2.3. Caracterización de segundo orden de la convexidad

En esta parte daremos una caracterización de la convexidad para funciones de clase $\mathcal{C}^2$ definidas en $\mathbb{R}^d$ mediante la Hessiana.

Proposición 3.13 (caracterización de segundo orden)**.** Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$. Los siguientes son equivalentes:
(i). La función f es convexa;
(ii). La Hessiana $\mathcal{H}_f(x)$ es semi-definida positiva, para cada $x \in X$.

Demostración. (i)$\Longrightarrow$(ii). Sea $x \in \mathbb{R}^d$ y $u \in \mathbb{R}^d \diagdown \{0\}$. Definimos la función

$$\Psi(t) = Df(x+tu)(u) = \langle \nabla f(x+tu), u \rangle, \qquad t \in \mathbb{R}$$

de forma que

$$\Psi'(t) = D^2 f(x+tu)(u,u) := u^T \mathcal{H}_f(x+tu)u.$$

Por la Proposición 3.6(iii) deducimos que para todo $t > 0$

$$\Psi(t) - \Psi(0) = \left(Df(x+tu) - Df(x)\right)(u) = \frac{1}{t}\left(Df(x+tu) - Df(x)\right)(tu) \geq 0.$$

Deducimos que para $t > 0$ se tiene

$$\frac{\Psi(t) - \Psi(0)}{t} \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Psi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\Psi(t) - \Psi(0)}{t} \geq 0,$$

y por lo tanto $u^T \mathcal{H}_f(x) u = \Psi'(0) \geq 0$. Dado que $u \in \mathbb{R}^d \diagdown \{0\}$ es arbitrario, concluimos que $\mathcal{H}_f(x) \succeq 0$.

(ii)$\Longrightarrow$(i). Sea $x, y \in \mathbb{R}^d$ y $u := y - x$. Definimos la función diferenciable

$$\Psi(t) = Df(x+tu)(u) = \langle \nabla f(x+tu), u \rangle, \qquad t > 0.$$

Aplicando el teorema del valor medio para la función Ψ en el intervalo $[0,1]$, deducimos la existencia de $t_* \in [0,1]$ tal que

$$\Psi(1) - \Psi(0) = \Psi'(t_*) := u^T \mathcal{H}_f(x + t_* u)u \geq 0$$

de lo cual obtenemos la monotonía de la derivada Df dado que

$$\Psi(1) - \Psi(0) = \left(Df(x+u) - Df(x)\right)(u) = \left(Df(y) - Df(x)\right)(y-x).$$

La demostración es completa. $\square$

4. Optimización con restricciones

En esta parte nos interesamos en problemas de optimización con restricciones. Más precisamente, nos interesamos en minimizar (o maximizar) una función $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ bajo la condición que $H(x) = 0$, donde $H : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$. Para este tipo de problemas presentaremos la teoría de Lagrange que nos proporciona condiciones necesarias (y luego, suficientes) de optimalidad cuando las funciones f y H son de clase $\mathcal{C}^1$ (respectivamente $\mathcal{C}^2$).

Empezaremos con un recordatorio del álgebra lineal sobre el rango de una matriz.

4.1. Recordatorio sobre el rango de una matriz

Consideramos m vectores $X^1, \ldots, X^m$ en $\mathbb{R}^d$ y anotemos por $A \in \mathcal{M}_{m\times d}$ la matriz cuyas lineas están formadas por las coordenadas de dichos vectores en la base canónica $\{e_i\}_{i=1}^d$ de $\mathbb{R}^d$. Recordamos del álgebra lineal el siguiente resultado.

Proposición 4.1 (Caracterización del rango de una matriz)**.** Los siguientes son equivalentes:

(i). Los vectores $X^1, \ldots, X^m$ son linealmente independientes.

(ii). La dimensión del subespacio generado por los vectores $X^1, \ldots, X^m$ es igual a m.

(iii). La matriz $(m \times d)$

$$A = \begin{pmatrix} X^1(1) & \ldots & \ldots & \ldots & X^1(d) \\ \vdots & & & & \vdots \\ X^m(1) & \ldots & \ldots & \ldots & X^m(d) \end{pmatrix}$$

tiene rango igual a m.

(iv). Existe una base $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^d$ de $\mathbb{R}^d$ tal que las últimas m-columnas de la matriz

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{X}^1(1) & \ldots & \ldots & \tilde{X}^1(d-m+1)\ldots & \ldots & \tilde{X}^1(d) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \tilde{X}^m(1) & \ldots & \ldots & \tilde{X}^m(d-m+1)\ldots & \ldots & \tilde{X}^m(d) \end{pmatrix}$$

(cuyas lineas están formadas con las nuevas coordenadas de los vectores $X^1, \ldots, X^m$) forman una sub-matriz $(m \times m)$ invertible.

4.2. La teoría de Lagrange

Consideramos el siguiente problema de minimización local, bajo restricciones de igualdad:

$$(\mathcal{P}) \qquad \left| \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ H(x) = 0 & \end{array} \right. \qquad \text{donde} \quad f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}),\ H = (H_1, \ldots, H_m) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m).$$

El siguiente teorema, conocido como teorema de Lagrange, es una aplicación del teorema de la función implicita, y proporciona condiciones necesarias de optimalidad.

Teorema 4.2 (Teorema de Lagrange). *Sea $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ una solución del problema $(\mathcal{P})$. Supongamos que los gradientes $\{\nabla H_i(\bar{x})\}_{i=1}^m$ son linealmente independientes*[10]*. Entonces existen $\{\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m\} \subset \mathbb{R}$ (conocidos como multiplicadores de Lagrange) tales que*

$$\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla H_i(\bar{x})$$

Demostración. Por la Proposición 4.1 podemos encontrar una base $\{\widehat{e}_i\}_{i=1}^d$ de $\mathbb{R}^d$ tal que la matriz Jacobiana (en la nueva base[11])

$$\widehat{JH}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial \hat{x}_1}(\bar{x}) & \ldots & \ldots & \frac{\partial H_1}{\partial \hat{x}_{d-m+1}}(\bar{x}) & \ldots & \frac{\partial H_1}{\partial \hat{x}_d}(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial H_m}{\partial \hat{x}_1}(\bar{x}) & \ldots & \ldots & \frac{\partial H_m}{\partial \hat{x}_{d-m+1}}(\bar{x}) & \ldots & \frac{\partial H_m}{\partial \hat{x}_d}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

tiene las últimas m-columnas linealmente independientes. Ponemos $k = d - m$ y consideramos la decomposición

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$$

de forma que cada $x \in \mathbb{R}^d$ se descompone como

$$x = (\underbrace{x_1, \ldots, x_k}_{y \in \mathbb{R}^k}, \underbrace{x_{k+1}, \ldots, x_d}_{z \in \mathbb{R}^m}) \equiv (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m.$$

En particular,

$$\bar{x} = (\bar{y}, \bar{z}) \qquad \text{y} \qquad \underbrace{DH(\bar{x})}_{m \times d} = \left(\underbrace{D_y H(\bar{x})}_{m \times k} \mid \underbrace{D_z H(\bar{x})}_{m \times m} \right)$$

Aplicando el Teorema de la Función Implícita deducimos que existe $\delta > 0$ y $\Phi : B(\bar{y}, \delta) \to \mathbb{R}^m$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $\Phi(\bar{y}) = \bar{z}$ y

$$H(y, \Phi(y)) = 0 \qquad \text{para todo } y \in B(\bar{y}, \delta).$$

Definimos la función

$$\begin{cases} u \in \mathcal{C}^1(B(\bar{y}, \delta), \mathbb{R}) \\ u(y) = f(y, \Phi(y)) \end{cases}$$

y por la regla de cálculo tenemos

$$Du(y) = D_y f(y, \Phi(y)) + D_z f(y, \Phi(y)) D\Phi(y) \qquad \text{para todo } y \in B(\bar{y}, \delta).$$

[10] Para eso, es necesario que $m \leq d$.

[11] Recordamos que:

$$\frac{\partial H}{\partial \hat{x}_i}(\bar{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{H(\bar{x} + t\widehat{e}_i) - H(\bar{x})}{t}$$

En particular, $\bar{x} = (\bar{y}, \bar{z}) \equiv (\bar{y}, \Phi(\bar{y}))$ y observamos[12] que

$$Du(\bar{y}) = D_y f(\bar{x}) + D_z f(\bar{x}) D\Phi(\bar{y}) = \mathbf{0}_k,$$

es decir

$$D_y f(\bar{x}) = -D_z f(\bar{x}) D\Phi(\bar{y}). \tag{5}$$

También definimos la función (constante, igual a $\mathbf{0}_m$!)

$$\begin{cases} G \in \mathcal{C}^1(B(\bar{y}, \delta), \mathbb{R}^m) \\ G(y) = H(y, \Phi(y)) = \mathbf{0}_m \end{cases}$$

por lo tanto, aplicando la regla de cálculo, obtenemos

$$DG(y) = \underbrace{DH(y, \Phi(y))}_{(D_y H \,|\, D_z H)} \circ \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k\times k} \\ D\Phi(y) \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{m\times k}.$$

Se deduce que

$$D_y H(y, \Phi(y)) \circ \mathbb{I}_{k\times k} + \underbrace{D_z H(y, \Phi(y))}_{\text{invertible}} D\Phi(y) = \mathbf{0}_{m\times k}$$

de lo cual

$$D\Phi(y) = -\left[D_z H(y, \Phi(y))\right]^{-1} \left[D_y H(y, \Phi(y))\right]$$

En particular, para $y = \bar{y}$ tenemos $(\bar{y}, \Phi(\bar{y})) = \bar{x}$ y la igualdad anterior toma la forma:

$$D\Phi(\bar{y}) = -\left[D_z H(\bar{x})\right]^{-1} \left[D_y H(\bar{x})\right] \tag{6}$$

Substituyendo la expresión de la derivada $D\Phi(\bar{y})$ dada por (6) en la (5) obtenemos:

$$\underbrace{D_y f(\bar{x})}_{1\times k} = \underbrace{D_z f(\bar{x})}_{1\times m}\, \underbrace{D_z H(\bar{x})^{-1}}_{m\times m}\, \underbrace{D_y H(\bar{x})}_{m\times k}$$

Combinando la fórmula anterior con la fórmula tautológica:

$$\underbrace{D_z f(\bar{x})}_{1\times m} = \underbrace{D_z f(\bar{x})}_{1\times m}\, \underbrace{D_z H(\bar{x})^{-1} D_z H(\bar{x})}_{\mathbb{I}_{m\times m}}$$

obtenemos

$$\underbrace{Df(\bar{x})}_{1\times d} = \left[\underbrace{D_z f(\bar{x})\, D_z H(\bar{x})^{-1}}_{1\times m}\right] \circ \underbrace{DH(\bar{x})}_{m\times d} \tag{7}$$

[12] La función u corresponde a la restricción de la función f en el conjunto

$$K = \{x \in \mathbb{R}^d : H(x) = 0\}$$

y siendo diferenciable, satisface en su mínimo la condición de optimalidad del primer orden $Du(\bar{y}) = 0$.

Representando las derivadas por matrices Jacobianas, tenemos que

$$Jf(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x})^T = \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_d}\right) \quad \text{y} \quad JH(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \nabla H_1(\bar{x})^T \\ \vdots \\ \nabla H_m(\bar{x})^T \end{pmatrix}$$

luego anotemos por $(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ la matriz $(1 \times m)$ que representa $D_z f(\bar{x})\, D_z H(\bar{x})^{-1}$. El resultado deseado se deduce directamente de la ecuación (7). $\square$

El resultado anterior admite una interpretación en términos de la llamada *función de Lagrange*. En efecto, para formular la condición necesáría de optimalidad del problema $(\mathcal{P})$ consideramos la función

$$\begin{cases} \mathcal{L} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \\ \\ \mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T H(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i H(x) \end{cases}$$

donde $x \in \mathbb{R}^d$ y $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Entonces bajo las condiciones del Teorema 4.2, si $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ es una solución del problema $(\mathcal{P})$, entonces existe $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ (multiplicadores de Lagrange) tal que el punto $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ satisface la condición necesaria del primer orden para la función aumentada $\mathcal{L}$, es decir

$$D\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \mathbf{0}_{d \times m} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla H_i(\bar{x}) \\ \\ H(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

4.3. Espacio tangente y condiciones de segundo orden

En esta parte, vamos a suponer que las funciones

$$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad H = (H_1, \ldots, H_m) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$$

son de clase $\mathcal{C}^1$. Anotemos por

$$K = \{x \in \mathbb{R}^d : \, H(x) = 0\} = \bigcap_{i \in \{1, \ldots m\}} H_i^{-1}(\{0\}) = H^{-1}(\mathbf{0}_m)$$

el conjunto (cerrado) factible del problema de minimización $(\mathcal{P})$ de forma que:

$$(\mathcal{P}) \qquad \left| \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ x \in K & \end{array} \right.$$

Para cada $\bar{x} \in K$ definimos:

$$T_K(\bar{x}) = \left\{u \in \mathbb{R}^d : \, \langle \nabla H_i(\bar{x}), u \rangle = 0, \, \forall i \in \{1, \ldots, m\}\right\} = \bigcap_{i \in \{1, \ldots m\}} \left[DH_i(\bar{x})\right]^{-1}(\{0\}).$$

Un caso frecuente en la práctica es el caso donde las funciones $\{H_i\}_{i=1}^m$ son afines, es decir,

$$H_i(x) = \langle q_i, x\rangle + \gamma_i\,, \qquad i \in \{1,\ldots,m\}, \tag{8}$$

con pendientes $\{q_i\}_{i=1}^m$ linealmente independientes[13]. En este caso, K es un subespacio afín de $\mathbb{R}^d$ y $T_K(\bar{x})$ es el subespacio vectorial adyacente de dimensión $d-m$.

Observación 4.3 (subvariedad diferenciable)**. (★)** En el caso general, sea $k \geq 1$ y $H \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$. Ponemos $K = H^{-1}(\mathbf{0}_m)$ y consideramos $\bar{x} \in K$. La hipotesis que los gradientes $\nabla H_1(\bar{x}),\ldots,\nabla H_m(\bar{x})$ son linealmente independientes, garantiza que el conjunto K tiene una estructura de *variedad diferenciable* (de hecho, subvariedad de $\mathbb{R}^d$ de clase $\mathcal{C}^k$) alrededor del punto $\bar{x}$. En este caso, $T_K(\bar{x})$ se llama *espacio tangente* de K en dicho punto. En este caso, $\dim(T_K(\bar{x})) = d-m$ y la variedad K tiene dimensión $d-m$ (y se aproxima localmente por su espacio tangente).

A continuación daremos, sin demostración, condiciones necesarias y condiciones suficientes que involucran la Hessiana de f en el caso de restricciones afines. Dicho resultado nos permitirá resolver el problema $(\mathcal{P})$ en la práctica, tal y como lo hicimos en el caso de minimización sin restricciones.

Proposición 4.4 (Condiciones de optimalidad de segundo orden)**.** Sea $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ y $H_i(x) = \langle q_i, x\rangle + \gamma_i$, para $i \in \{1,\ldots,m\}$. Supongamos que los vectores $\{q_i\}_{i=1}^m$ son linealmente independientes, y consideramos el problema de minimización local con restricciones

$$(\mathcal{P}) \quad \left|\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ x\in K & \end{array}\right. \qquad \text{donde} \qquad K = \bigcap_{i\in\{1,\ldots m\}} H_i^{-1}(\{0\}).$$

(CN-2). (Condiciones necesarias de optimalidad) Sea $\bar{x} \in K$ una solución de $(\mathcal{P})$. Entonces existen $\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_m \in \mathbb{R}$ (multiplicadores de Lagrange) tales que

$$\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \nabla H_i(\bar{x}) \qquad \text{y} \qquad u^T\mathcal{H}_f(x)u \geq 0,\ \forall u \in T_K(\bar{x}).$$

(CS-2). (Condiciones suficientes de optimalidad) Sea $\bar{x} \in K$ y $\bar{\lambda}_1,\ldots,\bar{\lambda}_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i \nabla H_i(\bar{x}) \qquad \text{y} \qquad u^T\mathcal{H}_f(x)u > 0,\ \forall u \in T_K(\bar{x})\setminus\{0\}.$$

Entonces $\bar{x}$ es una solución del problema $(\mathcal{P})$.

4.4. Ilustración mediante un ejemplo

Consideramos las funciones

$$\left\{\begin{array}{l} f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \\ f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{4}x_3^2 \end{array}\right. \qquad \text{y} \qquad \left\{\begin{array}{l} h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \\ h(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_2+x_3-1 \end{array}\right.$$

[13] Observen que $q_i = \nabla H_i(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

y el problema de minimización

$$(\mathcal{P}) \quad \left| \begin{array}{cc} \text{mín} & f(x) \\ h(x) = 0 & \end{array} \right.$$

La función f es un polinomio (a fortiori, de clase $\mathcal{C}^2$) con derivada

$$\nabla f(x) = (2x_1, x_2, -\frac{1}{2}x_3)$$

y Hessiana

$$\mathcal{H}_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

mientras que h es afín con

$$\nabla h(x) = (1, 1, 1).$$

Antes de continuar, observamos que la forma de la Hessiana de f impide la existencia de extremos locales (mínimos o máximos) de f en $\mathbb{R}^3$. Dicho eso, veremos que el problema (de minimización bajo restricción) $(\mathcal{P})$ si que tiene solución. Aplicando la teoría de Lagrange (Teorema 4.2), buscamos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla h(x) \qquad \text{y} \qquad h(x) = 0.$$

Eso nos lleva al sistema (4×4)

$$\left\{ \begin{array}{c} 2x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right.$$

cuya única solución es $\bar{\lambda} = -2$ y $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (-1, -2, 4)$. Se deduce que el punto $\bar{x} = (-1, -2, 4)$ es el único candidato para ser solución del problema $(\mathcal{P})$. Para asegurar que $\bar{x}$ es efectivamente una solución, necesitamos comprobar que para todo $u = (u_1, u_2, u_3) \in T_K(\bar{x}) \setminus \{0\}$, se cumple $u^T \mathcal{H}_f(x) u > 0$ (*c.f.* (CNS-2) de la Proposición 4.4). En efecto:

$$T_K(\bar{x}) = \{u \in \mathbb{R}^3 : \langle \nabla h(\bar{x}), u \rangle = 0\} = \{u \in \mathbb{R}^3 : u_1 + u_2 + u_3 = 0\} \tag{9}$$

y para cada $u \in T_K(\bar{x})$ deducimos que:

$$u^T \mathcal{H}_f(x) u \;=\; 2u_1^2 + u_2^2 \underbrace{-\frac{1}{2}u_3^2}_{u_3 = -(u_1+u_2)} \;=\; u_1^2 + \frac{1}{2}(u_1 - u_2)^2 \geq 0.$$

Observamos que

$$u^T \mathcal{H}_f(x) u = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_1^2 + \frac{1}{2}(u_1 - u_2)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow}_{u_1+u_2+u_3=0} \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{array} \right.$$

por lo que se concluye que para todo $u \in T_K(\bar{x}) \setminus \{0\}$ se tiene que $u^T \mathcal{H}_f(x) u > 0$ y $\bar{x} = (-1, -2, 4)$ es la única solución del problema $(\mathcal{P})$.

5. Problemas propuestos

Incluimos en esta sección una lista de problemas, clasificados por temas y de dificultad variada, que están basados en la teoría desarrolada en esta segunda parte del curso.

5.1. Ejercicios sobre optimización sin restricciones

O1. Considere la función definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad \text{donde } \mu \in \mathbb{R} \text{ y } \sigma > 0.$$

Sea $\{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}$ un conjunto de puntos (data). Se define:

$$L(\mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

a) Encuentre $L(\mu, \sigma)$ explícitamente.

b) Resuelva el problema:

$$\max_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0} \ \ln(L(\mu, \sigma)),$$

es decir, encuentre los valores $\overline{\mu} \in \mathbb{R}$ y $\overline{\sigma} > 0$ que maximizan $\ln(L(\mu, \sigma))$.
Observación: Los valores óptimos $\overline{\mu}$ y $\overline{\sigma}$ dependen solo de los puntos $\{x_1, ..., x_n\}$.

O2. Considere la función $f(x, y) = (ax^2 + b^y)e^{-(x^2+y^2)}$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Encuentre y calcule los máximos y mínimos globales.

Indicación: Considere por separado los casos $a = b$, $a > b$ y $a < b$.

O3. Suponga que $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ se define $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = ||x - a||_2^2 \ ||x - b||_2^2 .$$

a) Encuentre los puntos críticos de f.

b) Determine si los puntos encontrados son máximos locales, mínimos locales o puntos silla.

O4. Encuentre los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = \ x\, y\, e^{-x^2-y^2}$$

y determine si son máximos locales, mínimos locales o puntos silla.

O5. Hallar y clasificar los puntos críticos de la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \sin x + y^2 + 2y \cos x + 1.$$

5.2. Ejercicios sobre convexidad

C1. Sea X un espacio vectorial y $C \subseteq X$.

a) Muestre que el conjunto C es convexo si y sólo si para cada $\lambda \in [0,1]$ se tiene:

$$\lambda C + (1-\lambda)C = C.$$

b) Muestre que el conjunto C es convexo si y sólo si para cada $n \geq 1$, $\{x_i\}_{i=1}^n \subset C$ y $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset [0,1]$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in C.$$

C2. Sea X un espacio normado y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Pruebe que la función f es convexa si y sólo si para cada $x, y \in \mathrm{dom}(f)$, y cada $z \in (x, y)$ se cumple:

$$\frac{f(z) - f(x)}{||z - x||} \leq \frac{f(y) - f(z)}{||y - z||}.$$

C3. Sea X un espacio normado y $C \subseteq X$ no vacío. Pruebe que la función

$$d_C(x) := \inf_{y \in C} ||x - y||$$

es convexa si y sólo si el conjunto C es convexo. En el caso que C sea cerrado, pruebe además que la función d_C es $1-$Lipschitz.

C4. Muestre que para cada $x \in \mathbb{R}_+$, se tiene $\left(\frac{x+1}{2}\right)^{x+1} \leq x^x$.

C5. Dados m números positivos $\{x_i\}_{i=1}^m \subset (0, +\infty)$, pruebe la siguiente desigualdad:

$$\sqrt[m]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{m-1} \cdot x_m} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdot + x_{m-1} + x_m}{m}.$$

Indicación: La función $f(x) = -\ln(x)$ puede ser de utilidad.

5.3. Ejercicios sobre optimización con restricciones

R1. Una caja rectangular sin tapa ha de tener un volumen de 32 unidades cúbicas. ¿Cuáles han de ser las dimensiones para que la superficie total sea mínima?

R2. Averiguar la mínima distancia del origen a la hipérbola

$$x^2 + 6xy + 7y^2 + 225.$$

R3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ y tal que

$$\Delta f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Muestre que la función f no puede tener un máximo local.

R4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ y sea (x_0, y_0) un punto extremo local (i.e. mínimo o máximo local) de f. Supongamos que la función f es armónica, es decir:

$$\Delta f = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pruebe que todas las derivadas parciales segundas de f se deben anulan en (x_0, y_0).

R5. Hallar los valores máximos y mínimos de la función

$$f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$$

sujetos a las condiciones

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} \qquad \text{y} \qquad z = x + y.$$

5.4. Problemas de economía

P1. Un estudiante de la facultad necesita alimentos A y entretención E para su buen rendimiento académico en la universidad. Si bien recibe una beca por monto I, tiene la opción de aumentar su ingreso haciendo clases particulares. Por cada hora H de clases particulares que realiza recibe un salario de w. Esta persona cuenta con un máximo de T horas disponibles para realizar clases particulares. Las preferencias de este estudiante pueden ser presentadas a través de la siguiente función de utilidad:

$$U(A, E, H) = A^{\alpha} E^{\beta} (T - H)^{1-\alpha-\beta}$$

donde α y $\beta \in (0,1)$ son parámetros conocidos, y además se tiene que $\beta > \alpha$.

Note que el nivel de utilidad de este estudiante es decreciente en la cantidad de horas, H, que trabaja. Lo anterior se debe a que el alumno valora negativamente hacer clases particulares, ya que esto le quita tiempo para sus labores académicas, a las cuales dedica un tiempo total de $T - H$. Considere que el precio de los alimentos y la entretención p_A, p_E, respectivamente. De los conocimientos de economía se sabe que el estudiante enfrenta el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & A^{\alpha} E^{\beta} (T-H)^{1-\alpha-\beta} \\ \text{s.a} \quad & p_A A + p_E E = I + wH \end{aligned}$$

El objetivo de este problema es obtener el valor de A, E, H óptimos para el estudiante, para esto siga los siguientes pasos:

a) Recuerde que si h es estrictamente creciente entonces el valor $\overline{x}$ que optimiza f es el mismo que el que optimiza $h \circ f$. Así presente otro problema de optimización, aplicando alguna función conveniente, el cual le va a dar el mismo vector de soluciones. (Recuerde el comportamiento de las potencias con otras funciones)

b) Optimice el nuevo problema y encuentre el valor óptimo de A, E, H para el estudiante.

P2. En economía, un problema estándar de consumo-ahorro en tres períodos de tiempo, consiste en maximizar la utilidad total, escogiendo la mejor estrategia de consumos (c_1, c_2, c_3) de cada período y de ahorros (a_1, a_2) donde a_i representa el ahorro del período i que será usado en el período $i+1$. Aquí suponemos que la utilidad total de está dada por la función:

$$u(c_1, c_2, c_3, a_1, a_2) = \ln(c_1) + \beta \ln(c_2) + \beta^2 \ln(c_3)$$

donde $\beta \in (0,1)$ es un parámetro conocido. Los consumos y los ahorros están sujeto a las tres restricciones que se detallan a continuación:

Período 1: Durante este periodo hay dos ingresos conocidos: un ahorro previo $a_0 \geq 0$, el cual ha ganado intereses a tasa r, más una mesada $w > 0$. O sea el ingreso total de este período es $(w + (1+r)a_0)$. Estos ingresos se deben distribuir estratégicamente entre el consumo c_1 y el ahorro a_1, que será depositado para ser usado en el período siguiente. Por lo tanto:

$$a_1 + c_1 = w + (1+r)a_0$$

Período 2: En este período, los 2 ingresos son el ahorro guardado del período 1, el cual ganó intereses, y la nueva mesada $w > 0$ del período (que suponemos es igual que la anterior). Por lo tanto:

$$a_2 + c_2 = w + (1+r)a_1$$

Período 3: Los ingresos son análogos al período 2, pero por ser el último, no hay ahorro para el futuro. O sea el ingreso se consume completamente, es decir:

$$c_3 = w + (1+r)a_2$$

(i) Escriba el problema en la forma clásica, es decir,

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & f(c_1, c_2, c_3, a_1, a_2) & \\ \text{s.a} \quad & g_1(c_1, c_2, c_3, a_1, a_2) & = 0 \\ & g_2(c_1, c_2, c_3, a_1, a_2) & = 0 \\ & g_3(c_1, c_2, c_3, a_1, a_2) & = 0 \end{aligned}$$

explicitando todas las funciones.

(ii) Explicite el Lagrangiano del problema en la forma $L(c_1, c_2, c_3, a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

(iii) Escriba las condiciones de primer orden con respecto a c_1, c_2, c_3 para despejar estas variables en términos de λ_3

(iv) Use las restricciones del problema para despejar los ahorros en términos de λ_3. Calcule $\frac{1}{\lambda_3}$ en término de los datos y encuentre los consumos y ahorros óptimos. ¿Pueden ser los 3 consumos óptimos iguales? En caso de que su respuesta sea afirmativa diga cuando se cumple.